Zadanie 1

Mamy sześcian o boku długości 6. Z trzech naroży zostają wykrojone trzy mniejsze sześciany (niekoniecznie takie same), każdy o krawędzi mniejszej od 3. Niech P - oznacza pole powierzchni utworzonej bryły. Zaznaczyć zdania prawdziwe.

(A) Najmniejszą możliwą wartością P jest 6^3.

(B) $P \leqslant 6^3$.

(C) $P \geqslant 6^3$.

(D) Największą możliwą wartością P jest 6^3.

Zadanie 2

Mamy dwa trójkąty: T_1, T_2. Wiemy, że każdy bok trójkąta T_1 jest większy od każdego boku trójkata T_2. Zaznaczyć zdania prawdziwe.

(A) Długość okręgu wpisanego w T_1 jest większa od długości okręgu wpisanego w T_2.

(B) Pole trójkąta T_1 jest większe od pola trójkąta T_2.

(C) Obwód trójkąta T_1 jest większy od obwodu trójkata T_2.

(D) Długość okręgu opisanego na T_1 jest większa od długości okręgu opisanego na T_2.

Zadanie 3

Niech n oznacza liczbę przekątnych sześciokąta foremnego. Zaznaczyć zdania fałszywe.

(A) n jest liczbą pierwszą.

(B) n jest liczbą złożoną.

(C) n jest równe co najmniej 8.

(D) n jest równe co najwyżej 12.

Zadanie 4

Na kuli o promieniu r opisano walec. Niech V_k, V_w, P_k, P_w oznaczają odpowiednio objętość kuli i walca, pole powierzchni kuli i walca. Zaznaczyć zdania fałszywe.

(A) $\dfrac{V_k}{V_w} = \dfrac{P_k}{P_w}$.

(B) $V_k = \frac{8}{6}\pi r^3$.

(C) $\dfrac{V_k}{V_m} = \dfrac{2}{5}$.

(D) V_k jest zawsze liczbą niewymierną.

Zadanie 5

Zaznaczyć zbiór do którego należą wszystkie rozwiązania nierówności $\log_3(2016x+1) > \log_3(2015x)$.

(A) $(-1, \infty)$. (B) $\langle -1, \infty)$. (C) $(0, \infty)$. (D) $\langle 0, \infty)$.

Zadanie 6

Rozważmy równanie $cx^2 + bx + a = 0$ ze zmienną rzeczywistą x oraz parametrami rzeczywistymi a, b, c. Zaznaczyć zdania prawdziwe.

(A) Równanie może posiadać maksymalnie dwa różne rozwiązania.

(B) Jeżeli a, b, c są liczbami dodatnimi, to może istnieć dodatnie rozwiązanie równania.

(C) Istnieją takie wartości a, b, c, że rwnanie ma dokładnie jedno rozwiązanie.

(D) Jeżeli a, b, c są liczbami dodatnimi, to zawsze istnieje ujemne rozwiązanie równania.

Zadanie 7

Z cyfr ze zbioru $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ tworzymy liczby 7-cyfrowe o różnych cyfrach na wszystkie możliwe sposoby. Zaznaczyć zdania fałszywe.

(A) Co najmniej jedna z utworzonych liczb jest kwadratem liczby całkowitej.

(B) Co najmniej jedna z utworzonych liczb jest sześcianem liczby całkowitej.

(C) Liczba utworzonych liczb podzielnych przez 9 jest nieparzysta.

(D) Liczba utworzonych liczb parzystych jest parzysta.

Zadanie 8

Niech q będzie dowolną liczbą rzeczywistą oraz niech n będzie dowolną liczbą całkowitą dodatnią. Niech a_n będzie ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie równym b i ilorazie równym q^2. Niech S_n oznacza sumę n pierwszych wyrazów ciągu a_n. Wskazać zdania prawdziwe.

(A) S_n wyraża się wzorem $S_n = b\dfrac{1 - q^{2n}}{1 - q^2}$.

(B) S_n wyraża się wzorem $S_n = b\dfrac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1}$.

(C) S_n wyraża się wzorem $S_n = b\dfrac{1 - q^n}{1 - q}$.

(D) Żadna z pozostałych odpowiedzi nie jest prawidłowa.

Zadanie 9

W kulę o promieniu R wpisano stożek. Niech r będzie promieniem podstawy takieg stożka, dla którego stożek ma największą objętość. Zaznaczyć zdania prawdziwe.

(A) $r = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$.

(B) r jest liczbą niewymierną.

(C) $r > \frac{2}{3}R$.

(D) $r \leqslant \frac{\sqrt{8}}{3}R$.

Zadanie 10

Rozważmy funkcję rzeczywistą $M(x) = \sin^2 x + \sin^2(x + 60^\circ) + \sin^2(x + 120^\circ)$. Zaznaczyć zdania prawdziwe.

(A) Zachodzi $M\left(x + \frac{\pi}{11}\right) = M(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

(B) Istnieje dokładnie jeden taki $x \in \mathbb{R}$, że $f(x) = x$.

(C) Równanie $M(x) = 0$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

(D) Najmniejszą wartością $M(x)$ jest $\frac{3}{2}$.

Zadanie 11

W trójkąt, którego długości boków są liczbami całkowitymi dodatnimi wpisano okrąg o promieniu równym 1. Zaznaczyć zdania fałszywe.

(A) Jedynym takim trójkątem jest trójkąt o bokach długości $3, 4, 5$.

(B) Istnieje nieskończenie wiele takich trójkątów.

(C) Istnieje trójkąt ostrokątny o podanych własnościach.

(D) Promień okręgu opisanego na danym trójkącie jest równy co najmniej $\dfrac{5}{2}$.

Zadanie 12

Punkty P, Q, R, S leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CD, DA czworokąta wypukłego ABCD. Odcinki PR i QS dzielą czworokąt ABCD na cztery takie czworokąty, że na trzech spośród nich można opisać okręgi. Wtedy

(A) na czwartym spośród tych czworokątów można opisać okrąg.

(B) suma kwadratów przekątnych czworokąta ABCD jest równa co najwyżej sumie kwadratów jego czterech boków.

(C) przekątne czworokąta ABCD dzielą się na połowy.

(D) czworokąt ABCD jest równoległobokiem.

Zadanie 13

W dziesięciopiętrowym bloku do windy na parterze wsiada 6 osób. W sposób losowy opuszczają one windę (na piętrach $1 - 10$). Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że wszyscy wysiądą na dokładnie dwóch piętrach.

(A) $\dfrac{\binom{10}{2} \cdot 2^6}{10^6}$. (B) $\dfrac{279}{100000}$. (C) $\dfrac{9\left(2^5 - 1\right)}{10^5}$. (D) $\dfrac{\binom{10}{8}}{5^6}$.

Zadanie 14

Niech a, b będą całkowitymi parametrami oraz niech $S_n = (a - b)n^2 + 2n + a^2 + b^2 - 1$ oznacza sumę n pierwszych wyrazów ciągu a_n, gdzie $n \geqslant 1$. Zaznaczyć zdania prawdziwe.

(A) Dla dowolnych a, b ciąg a_n jest ciągiem arytmetycznym.

(B) Istnieją dokładnie cztery takie pary (a, b), że ciąg a_n jest ciągiem arytmetycznym.

(C) Istnieje nieskończenie wiele takich par (a, b), że ciąg a_n jest ciągiem geometrycznym.

(D) Istnieje skończenie wiele takich par (a, b), że ciąg a_n jest ciągiem geometrycznym.