Zadanie 1

Dane są dwa trójkąty: T_1, T_2. Wiemy, że każdy bok trójkąta T_1 jest większy od każdego boku trójkata T_2. Jako odpowiedź wpisać wszystkie poprawne podpunkty.

(A) Długość okręgu wpisanego w T_1 jest większa od długości okręgu wpisanego w T_2.

(B) Pole trójkąta T_1 jest większe od pola trójkąta T_2.

(C) Obwód trójkąta T_1 jest większy od obwodu trójkata T_2.

(D) Długość okręgu opisanego na T_1 jest większa od długości okręgu opisanego na T_2.

(E) Dokładnie dwie pozostałe odpowiedzi są prawidłowe.

Zadanie 2

Rozważmy równanie $cx^2 + bx + a = 0$ ze zmienną rzeczywistą x oraz parametrami rzeczywistymi a, b, c. Jako odpowiedź wpisać wszystkie poprawne podpunkty.

(A) Jeżeli a, b, c są liczbami dodatnimi, to może istnieć dodatnie rozwiązanie równania.

(B) Jeżeli a, b, c są liczbami dodatnimi, to zawsze istnieje ujemne rozwiązanie równania.

(C) Jeżeli a, b, c są liczbami dodatnimi, to może istnieć ujemne rozwiązanie równania.

(D) Istnieją takie wartości a, b, c, że równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie.

(E) Równanie może posiadać maksymalnie dwa różne rozwiązania.

Zadanie 3

Niech q będzie dowolną liczbą rzeczywistą oraz niech n będzie dowolną liczbą całkowitą dodatnią. Niech a_n będzie ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie równym b i ilorazie równym q^2. Niech S_n oznacza sumę n pierwszych wyrazów ciągu a_n. Jako odpowiedź wpisać wszystkie poprawne podpunkty.

(A) S_n wyraża się wzorem $S_n = b\dfrac{1-q^{2n}}{1-q^2}$.

(B) S_n wyraża się wzorem $S_n = b\dfrac{q^{2n}-1}{q^2-1}$.

(C) S_n wyraża się wzorem $S_n = b\dfrac{q^{2n+2}-1}{q^2-1}$.

(D) S_n wyraża się wzorem $S_n = b\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

(E) Żadna z pozostałych odpowiedzi nie jest prawidłowa.

Zadanie 4

W kulę o promieniu $R = 3\sqrt{2}$ wpisano stożek. Niech r będzie promieniem podstawy takiego stożka, dla którego stożek ma największą objętość. Ile wynosi r?

Zadanie 5

Rozważmy funkcję rzeczywistą $f(x) = \sin^2 x + \sin^2(x + 60°) + \sin^2(x + 120°)$. Niech m oznacza najmniejszą wartość funkcji f, a M oznacza największą wartość funkcji f. Obliczyć $M - m$.

Zadanie 6

W dziesięciopiętrowym bloku do windy na parterze wsiada 6 osób. W sposób losowy opuszczają one windę (na piętrach $1-10$). Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że wszyscy wysiądą na dokładnie dwóch piętrach. Wynik podać w postaci ułamka dziesiętnego.

Zadanie 7

Niech c, d będą całkowitymi parametrami oraz niech $S_n = (c-d)n^2 + 2n + c^2 + d^2 - 1$ oznacza sumę n pierwszych wyrazów ciągu a_n, gdzie $n \geqslant 1$. W układzie współrzędnych (c, d) narysować te pary (c, d) dla których ciąg a_n będzie ciągiem arytmetycznym.

Zadanie 8

Podstawy dolne i podstawy górne dwóch walców są kołami o wspólnym środku, leżącymi w jednej płaszczyźnie. Promień większego koła jest równy 3, a wysokości walców są większe od 3. W pierścień pomiędzy walcami wpisano sześć kul stycznych zarówno do powierzchni bocznej jednego jak i drugiego walca oraz do podstawy dolnej większego walca. Każda z wpisanych kul jest ponadto styczna do dwóch innych. Wyznaczyć sumę objętości wpisanych kul.

Zadanie 9

Wyznaczyć zbiór wszystkich liczb całkowitych nieujemnych n dla których liczba $n^8 + n^6 + n^4 + n^2 + 1$ jest liczbą pierwszą.

Zadanie 10

Podać liczbę wszystkich rozwiązań równania $\cos x \cos 2x \cos 4x = \cos 20° \cos 40° \cos 80°$, które należą do przedziału $(0, 20\pi)$.

Zadanie 11

Dany jest ciąg liczbowy $a_n = \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n+2016}\right)$. Wyznaczyć (o ile istnieje) granicę ciągu a_n.

Zadanie 12

Wyznaczyć zbiór wszystkich rozwiązań nierówności $x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 2 > 0$.

Zadanie 13

Wyznaczyć sumę kwadratów wszystkich pierwiastków równania:

$$\sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-2} - \sqrt{x-1} = 0.$$

Zadanie 14

Znaleźć wszystkie rozwiązania poniższego układu równań

$$\begin{cases} 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 2y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \\ x^2 + y^2 = 3x + 2y \end{cases}$$

Zadanie 15

Gramy w prostą grę komputerową. Zaczynamy z 4 punktami, przy każdym kliknieciu mogą się zdarzyć dwie opcje:

- z prawdopodobienstwem równym $\frac{1}{3}$ zyskujemy 1 punkt,
- z prawdopodobienstwem równym $\frac{2}{3}$ tracimy 1 punkt.

Klikamy tak długo, aż uzyskamy albo 0 (wtedy przegrywamy), albo 6 punktów (wtedy wygrywamy). Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że przegramy w tę gre.

Zadanie 16

Znaleźć wszystkie rozwiązania równania

$$(\sin x - 2\cos x)^4 + \cos^4 x = (2\cos x - \sin x)(4\cos^2 x - 7\sin 2x + 6)\cos x$$

w przedziale $(0, 2\pi)$.

Zadanie 17

W szpitalu leży n pacjentów, w tym d dzieci. Na ile sposobów można pacjentom podać leki, jeśli rodzajów leków jest p oraz przyjmujemy, że dzieci są między sobą nierozróżnialne, a dorośli rozróżnialni?

Zadanie 18

W czworokącie o kolejnych wierzchołkach A, B, C, D punkty K, L, M i N dzielą boki, tak że $\frac{AK}{AB} = \frac{LC}{BC} = \frac{CM}{CD} = \frac{AN}{AD} = q$. Znajdź stosunek pola czworokąta $KLMN$ do pola czworokąta $ABCD$.

Zadanie 19

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym każda ściana boczna jest trójkątem równobocznym o boku $a = 6\sqrt{2}$. Ostrosłup przecinamy płaszczyzną Π równoległą do podstawy i odległą od niej o $b = 3$. Wyznaczyć sumę odległości od ścian bocznych punktu P leżącego na płaszczyźnie Π wewnątrz ostrosłupa.

Zadanie 20

Niech $W(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych takim, że wielomian $W(x) + 12$ ma co najmniej sześć różnych pierwiastków całkowitych. Wyznaczyć największą liczbę pierwiastków całkowitych wielomianu $W(x)$.

Zadanie 21

Wyznaczyć zbiór wartości funkcji $f(x) = \dfrac{2}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$.

Zadanie 22

Dany jest zbiór $\mathcal{Z} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Ze zbioru wszystkich podzbiorów zbioru $\mathcal{Z}$ wybieramy losowo ze zwracaniem dwa zbiory A_1 i A_2. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że oba wylosowane zbiory są rozłączne.

Zadanie 23

Rzucamy monetą do chwili pojawienia się po raz pierwszy reszki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że liczba rzutów będzie podzielna przez 2 lub przez 5?

Zadanie 24

W trzech jednakowych, nierozróżnialnych pudełkach znajdują się kolejno:

- dwie sztabki złota,
- dwie sztabki srebra,
- jedna sztabka złota i jedna sztabka srebra.

W sposób losowy dokonujemy wyboru pudełka oraz jednej sztabki w niej się znajdującej. Udało nam się wylosować sztabkę ze złota. Jaka jest szansa na to, że w wybranym przez nas pudełku jest jeszcze jedna złota sztabka?

Zadanie 25

Dany jest układ równań z dwiema rzeczywistymi niewiadomymi x i y oraz z rzeczywistymi parametrami a, b, c:

$$\begin{cases} bx - y = ac^2 \\ (b-6)x + 2by = c + 1 \end{cases}$$

Znaleźć wszystkie wartości a, przy których dla każdego b istnieje takie c, że układ ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

Zadanie 26

Wyznaczyć wszystkie te wartości parametru rzeczywistego $m \in \mathbb{R}$ dla których równania $\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2 \sin x \cos 2x$ oraz $\sin 3x = m \sin x + (4 - 2|m|) \sin^2 x$ są równoważne.

Zadanie 27

Dana jest funkcja rzeczywista

$$f(x) = 9^{|x|} + 2(2m + 1)3^{|x|} + 4m^2 - 5$$

z parametrem rzeczywistym m. Wyznaczyć wszystkie te wartości parametru m dla których nierówność $f(x) > 0$ jest spełniona dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 28

Z cyfr $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ wybieramy kolejno bez zwracania trzy cyfry i układamy z nich liczbę, rozpoczynając od cyfry setek. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na ułożeniu liczby podzielnej przez 9.

Zadanie 29

Wyznaczyć zbiór wartości funkcji rzeczywistej $f(x) = \sin^4 x \cdot (1 + \sin 2x)^2$.

Zadanie 30

Wraz z kolegą próbujesz na przemian otwierać zepsuty zamek. W każdej próbie prawdopodobieństwo, że tobie się to uda jest równe 0.8, a prawdopodobieństwo, że uda się to koledze jest równe 0.7. Niech p_n oznacza prawdopodobieństwo, że zamek otworzycie w n - tej próbie, przy założeniu, że pierwszy zacząłeś otwierać ty. Wyznaczyć (o ile istnieje) wartość $\lim\limits_{n\to\infty}(p_1+p_2+\ldots+p_n)$.

Zadanie 31

Na kole o promieniu r opisano trapez prostokątny, którego mniejsza podstawa jest równa $\frac{3}{2}r$. Obliczyć pole trapezu.

Zadanie 32

Dla pewnej wartości parametru rzeczywistego a, większego od 4, równanie

$$(a - 1 - |x - 1|)\left(a + x^2 - 2x - 4\right) = 0$$

ma dokładnie trzy (różne) pierwiastki. Wyznaczyć największy z tych pierwiastków.

Zadanie 33

Podać liczbę wszystkich rzeczywistych rozwiązań równania $\left[\dfrac{3x-7}{5}\right] = \dfrac{6x-9}{7}$. gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej x, tzn. największą liczbę całkowitą nie większą niż x.