Wykłady z układów dynamicznych

Opracowała J. Kotus

Spis treści

1 Podstawowe pojęcia i twierdzenia równań różniczkowych zwyczajnych

1.1 Równanie różniczkowe zwyczajne rzędu n w w przestrzeniach Banacha

Oznaczenia
$\mathcal{B}$- przestrzeń Banacha,
$\mathcal{B}^n = \mathcal{B} \times \ldots \times \mathcal{B}, \quad n \geq 1, n \in I\!N$
$I\!R$ - zbiór liczb rzeczywistych, $I \subset R$- przedział
$U \subset \mathcal{B}^{n+1}$ -zbiór otwarty
$F : K = I \times U :\to I\!R$ - dana funkcja

Definicja 1.1. *Wyrażenie postaci*

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0 \qquad \forall t \in I \tag{1.1}$$

nazywamy ***równaniem różniczkowym zwyczajnym*** **n*-tego rzędu***, *gdzie* $y = y(t)$ *nieznana funkcja zwana rozwiązaniem równania (1.1).*

Uwaga 1.2. *Równanie postaci (1.1) nazywamy równaniem* ***nierozwikłanym względem pochodnej***.

Definicja 1.3. *Jesli równanie (1.1) można zapisać w postaci*

$$y^{(n)} = f(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) = 0 \qquad \forall t \in I, \tag{1.2}$$

gdzie

$$f : I \times D \subset I\!R \times \mathcal{B}^n \to \mathcal{B}$$

to równanie (1.2) przedstawia równanie różniczkowe zwyczajne rzędu n ***w postaci normalmej***.

Definicja 1.4. ***Rozwiązaniem*** *równania rożniczkowego (1.1) nazywamy każdą funkcję* $y : I \to \mathcal{B}$, *taką że*

1. $y \in D^n(I)$ *(y jest funkcją n-krotnie rózniczkowalną)*

2. $\forall t \in I \quad F(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0$ *czyli równanie (1.1) jest spełnione tożsamościowo*

3. $\forall t \in I \quad (t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n)}(t)) \in K$

Lemat 1.5 (o równoważności). *Niech* $D \subset I\!R \times \mathcal{B}$, $(t_0, y_0) \in D$, $f \in C(D, \mathcal{B})$

ZC $\quad y' = f(t, y), \quad y'(t_0) = y_0$

RC $\quad y = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds,$

gdzie RC to równanie całkowe Voltery II rodzaju. Wtedy każde rozwiązanie **ZC** *jest rozwiązaniem* **RC** *i odwrotnie.*

Definicja 1.6. *Rozwiązaniem* ***zupełnym*** *(wysyconym) nazywamy takie rozwiązanie równania różniczkowego, którego, którego każde przedłużenie pokrywa się z tym rozwiązaniem.*

Definicja 1.7. *Niech* $f : I \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, $I = [a, b]$. *Mówimy, że* f *spełnia* ***warunek Lipschitza ze względu na drugą zmienną*** *ze stałą* $L > 0$ *(ozn.* $f \in Lip_2(L)$*) , gdy*

$$\forall y_1, y_2 \in \mathcal{B}, \quad \forall t \in I, \quad ||f(t, y_1) - f(t, y_2)|| \leq L||y_1 - y_2||$$

Twierdzenie 1.8 (Twiedzenie Picarda-Lindölefa). *Niech*

$I = [a, b]$, $\quad \mathcal{B}$*-przestrzeń Banacha,* $B(u_0, r)$*-kula w przestrzeni* $\mathcal{B}$,

$f \in C(I \times \overline{B(u_0, r)}, \mathcal{B}), \quad f \in Lip_2(L), \quad (t_0, y_0) \in I \times \mathcal{B}$ *(dowolny punkt).*

Wtedy istnieje dokładnie jedno rozwiazanie zupełne rozwiązania zagadnienia

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

określone na $[\alpha, \beta] \subset I$.

Uwaga 1.9. *Podamy przykłady ilustrujące istotę założeń podanych wyżej twierdzeń*

- ***Przykład równania które nie posiada rozwiązania***

$$y' = f(t) \quad f = \chi_Q = \begin{cases} 0 & t \notin Q \\ 1 & t \in Q \end{cases}$$

prawa strona równania nie jest funkcją ciągłą.

- ***Zagadnienie Cauchy'ego, które nie ma jednoznaczności rozwiązania***

$$\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Rozwiazaniami tego równania są np.(a) funkcje $y(t) \equiv 0$ *dla* $t \in I\!R$*, (b)* $y(t) = t^3$ *dla* $t \in I\!R$*, oraz*

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t^3 & t \geq 0 \end{cases}$$

Funkcja $y^{2/3}$ *nie spełnia warunku Lipschitza.*

- ***Ciągłość prawej strony równania w przestrzeni Banacha nieskończenie wymiarowej nie gwarantuje istnienia rozwiązania - przykład Dieudonné***

- Ciągłość prawej strony równania w przestrzeni Banacha skończenie wymiarowej gwarantuje istnienia rozwiązania

\- **Twierdzenie Peano**

i) **I wersja** *Niech* $I = [a, b]$, $J = [c, d]$, $f \in C(I \times J, I\!R)$. *Wtedy dla dowolnego* $(t_0, y_0) \in I \times (c, d)$ *istnieje zupełne rozwiązanie zagadnienia*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

określone na $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$

ii) **II wersja** *Niech* $I = [a, b]$, $f : I \times I\!R \to I\!R$ *będzie funkcją ciągłą i ograniczoną. Wtedy dla dowolnego* $(t_0, y_0) \in I \times (c, d)$ *istnieje zupełne rozwiązanie zagadnienia*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

określone na I

1.2 Równania liniowe w przestrzeniach Banacha

Oznaczenia

$\mathcal{B}$- przestrzeń Banacha

$\mathcal{L}(\mathcal{B})$ - przestrzeń operatorów liniowych i ciągłych z $\mathcal{B}$ do $\mathcal{B}$ jest **algebrą Banacha**

Niech $A \in C(I, \mathcal{L}(\mathcal{B}))$, $I = [0, a)$ lub $I = [0, +\infty)$. Rozpatrzmy równanie

$$\begin{cases} x' = A(t)x + g(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.4}$$

gdzie $t_0 \in I,\ x \in \mathcal{B}$, $g \in C(I, \mathcal{B})$. Wtedy równanie (1.4) spełnia założenia twierdzenia Picarda - Lindölefa, więc posiada rozwiązanie zupełne określone na I

Definicja 1.10. ***Równanie (1.4) nazywamy równaniem liniowym niejednorodnym*** *na przestrzeni Banacha $\mathcal{B}$. Jeśli zaś $g(t) \equiv 0$ dla $t \in I$ to równanie (1.4) nazywamy równaniem liniowym jednorodnym i zapisujemy $x' = A(t)x$.*

Definujemy funkcję $\tilde{A} : \mathcal{L}(\mathcal{B}) \to \mathcal{L}(\mathcal{B})$ następująco

$$\tilde{A}(U) = A(U),$$

gdzie $A \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ ***ustalony operator***. Wtedy $\tilde{A}$ jest funkcją liniową

$$\tilde{A}(aU_1 + bU_2) := A(aU_1 + bU_2) = aA(U_1) + bA(U_2) = a\tilde{A}(U_1) + b\tilde{A}(U_2)$$

i ciągłą,

$$||\tilde{A}(U)||_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} = ||A(U)||_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} \leq ||A||_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}||U||_{\mathcal{L}(\mathcal{B})}$$

($\tilde{A}$ jest funkcją ograniczoną, zatem jest ciągła) czyli

$$\tilde{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{B})).$$

Dana jest rodzina operatorów $A : I \to \mathcal{L}(\mathcal{B})$. Wprowadzamy funkcję

$$\tilde{A} : I \to \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{B}))$$

dla $U \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ $\quad \tilde{A}(t)U := A(t)U$ (bylo udowodnione, że $\tilde{A}$ jest ciągły)

Definicja 1.11. *Dana jest rodzina operatorów $A : I \to \mathcal{L}(\mathcal{B})$. rozpatrujemy równanie*

$$\begin{cases} U' = \tilde{A}(U) \\ U(0) = E \end{cases} \tag{1.5}$$

gdzie $\tilde{A}(U) = A(t)U$. Korzystając z (1.4) dowodzi się, że równanie (1.5) posiada rozwiązanie zupełne postaci $U : I \to \mathcal{L}(\mathcal{B})$ (jest to rodzina operatorów)

- Operatory $U(t)$ posiadają operatory odwrotne w $\mathcal{L}(\mathcal{B})$.
- Odwzorowania $t \to U(t)$ oraz $t \to U^{-1}(t)$ są ciągłe (nawet rózniczkowalne)
- Odwzorowania $(t, x) \to U(t)x$ oraz $(x, t) \to U^{-1}(t)x$ ze zbioru $I \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ są ciągłe

Definicja 1.12. *Wprowadzamy operator $\mathcal{R} : I^2 \to \mathcal{L}(\mathcal{B})$ zdefiniowany wzorem*

$$\mathcal{R}(t, t_0) = U(t)U^{-1}(t_0)$$

Własności operatora $\mathcal{R}$

1. Dla każdej ustalonej pary $(t, t_0) \in I^2$ operator $\mathcal{R}(t, t_0)$ jest liniowy i ciągly
2. Oprator $\mathcal{R}$ jest ciągły względem t i t_0
3. $\mathcal{R}(t_0, t_0) = E$
4. $\mathcal{R}(t_1, t_2)\mathcal{R}(t_2, t_3) = \mathcal{R}(t_1, t_3)$
5. $[\mathcal{R}(t, s)]^{-1} = \mathcal{R}(s, t)$
6. $||\mathcal{R}(t, t_0)||_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} \leq e^{\int_{t_0}^{t} ||A(s)||_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} ds}, \quad t \geq t_0$
7. Rozwiązanie zagadnienia
$$y' = A(t)y, \quad y(t_0) = y_0$$
jest postaci
$$y(t) = \mathcal{R}(t, t_0)y_0, \quad t \in I$$
Operator $\mathcal{R}(t, s)$ przesuwa rozwiązania od s do t.

8. Rozwiązanie zagadnienia niejednorodnego

$$y' = A(t)y + g(t), \quad y(t_0) = y_0$$

ma postać

$$y(t) = \mathcal{R}(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} \mathcal{R}(t, s)g(s)ds, \quad t \in I$$

Przy czym jeśli operator A nie zależy od t czyli jest stały, to

$$\mathcal{R}(t, t_0) = U(t)U^{-1}(t_0) = U(t - t_0), \quad t \geq t_0$$

1.3 Interpretacja otrzymanych faktów w przestrzeniach skończenie wymiarowych

1. $x' = A(t)x + b(t), \quad b \in C(I, \mathbb{R}^n), \quad A \in C(I, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$

   Operator liniowy z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$ można utożsamiać z macierzą. Zatem $A(t)x = M(t)x$ gdzie $A(t) = [a_{kl}(t)]_{n \times n}$-macierz kwadratowa. Wtedy

$$x'_k = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}(t)x_l + b_k(t)$$

2. Dla równania jednorodnego otrzymaliśmy jako rozwiązanie operator rodzinę operatorów $U : I \to \mathcal{L}(\mathcal{B})$. Zatem istnieje macierz $\tilde{X}(t)$, która spełnie równanie

$$\frac{d}{dt}\tilde{X}(t) = A(t)\tilde{X}(t), \quad \tilde{X}(0) = E$$

   gdzie E macierz jednostkowa. $\tilde{X}(t)$-macierz fundamentalna podstawowa

   Własności $\tilde{X}(t)$

   $\tilde{X}(t)$- różniczkowalna

   $\tilde{X}(t)$ posiada macierz odwrotną $\tilde{X}(t)^{-1}$

$\tilde{X}(t)\tilde{X}(s) = \tilde{X}(t+s)$

$\tilde{X}(-t) = \tilde{X}(t)^{-1}$

Uwaga 1.13. *Jeśli I zastąpimy przez $\mathbb{R}$, to jednoparametrowa rodzina macierzy fundamentalnych (za parametr przyjmujemy czas t) tworzy grupę ze względu na składanie czyli mnożenie macierzy tzn.*

(a) $\mathbb{R} \ni t \to \tilde{X}(t)$

(b) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (t,s) \to \tilde{X}(t)\tilde{X}(s) = \tilde{X}(t+s)$

(c) zachodzi własnośc łączności

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times u \ni (t,s,u) \to (\tilde{X}(t)\tilde{X}(s))\tilde{X}(u) = \tilde{X}(t+s)\tilde{X}(u) = \tilde{X}(t+s+u) =$$

$$\tilde{X}(t)\tilde{X}(s+u) = \tilde{X}(t)(\tilde{X}(s)\tilde{X}(u))$$

(d) istnieje element neutralny tzn. $\exists \tilde{X}(0) = E$ *taki, że* $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\tilde{X}(t)\tilde{X}(0) = \tilde{X}(0)\tilde{X}(t) = \tilde{X}(t)$$

(e) istnieje element odwrotny tzn. $\forall \tilde{X}(t) \quad \exists \tilde{X}(t)^{-1}$ *taki że* $\tilde{X}(t)\tilde{X}(t)^{-1} = \tilde{X}(t-t) = \tilde{X}(0) = E$

3. $\mathcal{R}(t,t_0)$ - macierz oraz $\mathcal{R}(t,t_0) = \tilde{X}(t)\tilde{X}(t_0)^{-1}, \quad \tilde{X}(0)^{-1} = E$

4. Każde rozwiązanie ***zagadnienia jednorodnego*** opisane jest wzorem

$$y(t) = \mathcal{R}(t,t_0)y_0 = \tilde{X}(t)\tilde{X}(t_0)^{-1}y_0$$

   Jeśli $A = const$ to $y(t) = \tilde{X}(t-t_0)y_0$ dla $t > t_0$

5. Każda kolumna macierzy $\tilde{X}(t)$ jest rozwiązaniem równania, a wektory tworzące kolumny są liniowo niezależne bo $\tilde{X}(t)$ jest nieosobliwa.

6.

Twierdzenie 1.14 (Liouville'a). *Jeśli macierz $X(t)$ jest rozwiązaniem równania*

$$y' = A(t)y$$

to

$$detX(t) = detX(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} trA(s)ds}$$

gdzie $trA(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(t)$.

Wniosek 1.15. *Jeśli dla pewnego t_0 zachodzi, że $detX(t_0) \neq 0$, to $detX(t) \neq 0$ dla $\forall t \in I$*

7. ***Zagadnienie niejednorodne***

$$y' = A(t)y + b(t), \quad y(t_0) = y_0$$

Niech $X(t)$ macierz fundamentalna równiania jednorodnego $y' = A(t)y$ Wtedy rozwiązanie zagadnienia niejednorodnego jest postaci

$$y(t) = X(t)X(t_0)^{-1}y_0 + X(t)\int_{t=t_0}^{t} X(s)^{-1}b(s)ds$$

1.4 Układy równań liniowych o stałych współczynnikach

Niech

$$y \in \mathbb{R}^n, \quad A = [a_{ij}]_{n\times n}, \quad a_{i,j} \in \mathbb{R}$$

Rozwiązania równania liniowego o stałych współczynikach

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1.6}$$

mają postać

$$y(t) = e^{At}y_0$$

gdzie

$$e^{At} = I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots$$

Wielomianem charakterystycznym macierzy A nazywamy wielomian

$$w_A(\lambda) = det(A - \lambda I),$$

gdzie I oznacza macierz jednostkową stopnia n.

Równaniem charakterystycznym macierzy A nazywamy równaie

$$w_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$$

czyli

$$det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots a_{2n} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Zaś jego pierwiastki (rzeczywiste i zespolone) nazywamy ***wartościami własnymi*** macierzy A.

Każdy niezerowy wektor $\vec{v}$ (o rzeczywistych lub zespolonych) współrzędnych nazywamy ***wektorem własnym*** macierzy A odpowiadającej wartości własnej λ tej macierzy, jeśli

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

(co można zapisać następująco)

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots a_{2n} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Niech λ będzie k-krotną wartością wląsną macierzy A. Każdy niezerowy wektor $\vec{v}$ nazywamy uogólnionym wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej λ, jeżeli spełnia równanie

$$(A - \lambda I)^k \vec{v} = \vec{0}.$$

Dla każdej k krotnej wartości własnej macierzy A istnieje dokładnie k liniowo niezależnych uogólnionych wektorów własnych. Zbiór tych wektorów nazywamy serią wektorów własnych odpowiadających wartości własnej.

Metoda Eulera wyznaczania układu fundamentalnego równania (1.6)

1) Jeżeli λ jest rzeczywistą jednokrotną wartością własną macierzy A, a $\vec{v}$ odpowiadającym jej wektorem własnym, to funkcja

$$e^{\lambda t}\vec{v}$$

jest rozwiązaniem układu (1.6).

2) Jeżeli $\lambda = \alpha + i\beta, \quad \overline{\lambda} = \alpha - i\beta, \quad \beta > 0$ są zespolonymi i jednokrotnymi wartościami własnymi macierzy A, a $\vec{v}$ wektorem własnym odpowiadającym wartości $\lambda = \alpha + i\beta$, to funkcje

$$\mathrm{Re}(e^{\lambda t}\vec{v}) \quad \mathrm{Im}(e^{\lambda t}\vec{v})$$

są rozwiązaniami układu (1.6)

3) Jeżeli λ jest k-krotną rzeczywistą wartością własną macierzy A, to każda z k funkcji wektorowych

$$e^{\lambda t}B\vec{v}_1, \quad e^{\lambda t}B\vec{v}_2, \quad \dots, \quad e^{\lambda t}B\vec{v}_k,$$

gdzie $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ tworzą serię uogólnionych wektorów własnych odpowiadających wartości λ, zaś B jest macierzą określona wzorem

$$B = I + t(A - \lambda I) + \frac{t^2}{2!}(A - \lambda I)^2 + \dots \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}(A - \lambda I)^{k-1}$$

jest rozwiązaniem układu (1.6).

2 Stabilność punktów równowagi

2.1 Stabilność i asymptotyczna stabilność

Definicja 2.1. ***Autonomicznym układem równań różniczkowych*** *nazywamy układ równań postaci*

$$\begin{cases} y_1' &= f_1(y_1, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots & \qquad \vdots \\ y_n' &= f_n(y_1, \dots, y_n) \end{cases} \tag{2.1}$$

Uwaga 2.2. *Układ równań różniczkowych jest autonomiczny, jeżeli jego prawe strony nie są jawnie zależne od zmiennej niezależnej t czyli od czasu. Czasami taki układ nazywamy także stacjonarnym. W notacji wektorowej autonomiczny układ równań różniczkowych można zapisać w postaci*

$$\vec{y}' = \vec{f}(\vec{y}).$$

Definicja 2.3. *Punkt $y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ nazywamy **puktem równowagi** układu (2.1) jeżeli*

$$\begin{cases} f_1(y_1^*, \ldots, y_n^*) &= 0 \\ f_2(y_1, \ldots, y_n) &= 0 \\ \quad\vdots & \\ f_n(y_1^*, \ldots, y_n^*) &= 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Każdy punkt równowagi wyznacza rozwiązanie stałe

$$y_1(t) \equiv y_1^*, \quad y_2(t) \equiv y_2^*, \quad \ldots, \quad y_n(t) \equiv y_n^*, \quad t \in I\!R.$$

Definicja 2.4. *Punkt równowagi $y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ układu (2.1) nazywamy **stabilnym**, jeżeli dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że każde rozwiązanie $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$ tego układu z warunkiem początkowym*

$$y_1(0) = y_1^0, \quad y_2(t) = y_2^0, \quad \ldots, \quad y_n(t) = y_n^0)$$

spełniającym warunek

$$||y(0) - y^*|| = \sqrt{(y_1^0 - y_1^*)^2 + (y_2^0 - y_2^*)^2 + \ldots + (y_n^0 - y_n^*)^2} < \delta \tag{2.3}$$

istnieje na $[0, \infty)$ i spełnia tam warunek

$$||y(t) - y^*|| = \sqrt{(y_1(t) - y_1^*)^2 + (y_2(t) - y_2^*)^2 + \ldots + (y_n(t) - y_n^*)^2} < \epsilon$$

W przeciwnym przypadku punkt równowagi nazywamy **niestabilnym.**

Definicja 2.5. *Punkt równowagi $y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ układu (2.1) nazywamy **asymptotycznie stabilnym**, jeżeli jest stabilny i jeżeli istnieje $\delta_0 > 0$, takie, że każdego rozwiązanie $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$ z warunkiem początkowym*

$$(y_1(0) = y_1^0, \quad y_2(t) = y_2^0, \quad \ldots, \quad y_n(t) = y_n^0)$$

spełniającym warunek

$$||y(0) - y^*|| = \sqrt{(y_1^0 - y_1^*)^2 + (y_2^0 - y_2^*)^2 + \ldots + (y_n^0 - y_n^*)^2} < \delta. \tag{2.4}$$

spełnia też warunki

$$\lim_{t\to+\infty} y_1(t) = y_1^*, \quad \lim_{t\to+\infty} y_2(t) = y_2^*, \quad \lim_{t\to+\infty} y_n(t) = y_n^* \tag{2.5}$$

Przykłady Wyznaczyć i zbadać stabilność punktów równowagi. Dla punktów stabilnych zbadać ich asymptotyczną stabilność.

(a) Niech

$$y' + y = 1.$$

Łatwo zauważyć, że jedynym punktem równowagi jest $y^* = 1$. Dowolne rozwiązanie równania spełniające warunek początkowy $y(0) = y_0$ jest postaci

$$y(t) = 1 - (1 - y_0)e^{-t}.$$

Niech $\epsilon > 0$ będzie dowolnie małe. Mamy znaleźć taką liczbę $\delta > 0$, że dla każdego $t \geq 0$ będzie spełniona nierówność $|y(t) - 1| < \epsilon$, o ile tylko $|y_0 - 1| < \delta$. Ponieważ dla $t \geq 0$ mamy

$$|y(t) - 1| = |1 - (1 - y_0)e^{-t} - 1| \leq |1 - y_0|,$$

więc żądana nierówność będzie spełniona gdy przyjmiemy, że $\delta = \epsilon$. Zatem punkt równowagi jest stabilny. Ponadto mamy,

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty}[1 - (1 - y_0)e^{-t}] = 1 = y^*,$$

co oznacza, że punkt równowagi jest asymptotycznie stabilny.

(b) Równanie

$$y' = 1 - y^2$$

ma dwa punkty równowagi $y_1^* = 1,\ y_2^* = -1$. Dowolne rozwiązanie spełniające warunek początkowy $y(0) = y_0$ ma postać

$$y(t) = \frac{(y_0 - 1) + (1 + y_0)e^{2t}}{-(y_0 - 1) + (1 + y_0)e^{2t}}.$$

Zbadamy stabilność punktu równowagi $y_1^* = 1$. Niech $\epsilon > 0$ będzie dowolnie małe. Ponieważ

$$|y(t) - 1| = \left| \frac{(y_0 - 1) + (1 + y_0)e^{2t}}{-(y_0 - 1) + (1 + y_0)e^{2t}} - 1 \right| = \frac{2|y_0 - 1|}{|-(y_0 - 1) + (1 + y_0)e^{2t}|}$$

Dla $t = 0$ otrzymamy

$$\frac{2|y_0 - 1|}{|-(y_0 - 1) + (1 + y_0)|} = \frac{2|y_0 - 1|}{2} = |y_0 - 1|$$

Dla $t > 0$ dostaniemy

$$\frac{2|y_0 - 1|}{|-(y_0 - 1) + (1 + y_0)e^{2t}|} < |y_0 - 1|$$

Zatem dla $t \geq 0$ otrzymamy $|y(t) - 1| \leq |y_0 - 1|$. Zatem wystarczy przyjąć $\delta = \epsilon$. Czyli $y_1^* = 1$ jest stabilnym punktem równowagi. Ponadto dla dowolnego warunku początkowego $y_0 > -1$ mamy

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{(y_0 - 1) + (1 + y_0)e^{2t}}{-(y_0 - 1) + (1 + y_0)e^{2t}} = 1.$$

Tak więc stabilność badanego punktu równowagi jest asymptotyczna. Ponieważ

$$\lim_{t \to -\infty} y(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{(y_0 - 1) + (1 + y_0)e^{2t}}{-(y_0 - 1) + (1 + y_0)e^{2t}} = -1.$$

to drugi punkt równowagi $y_2^* = -1$ jest niestabilny.

(c) Niech

$$\begin{cases} x' &= & 2y \\ y' &= & -2x \end{cases}$$

Dla rozważanego układu równań jedynym punktem równowagi jest punkt $(x^*, y^*) = (0, 0)$. Ponadto rozwiązanie tego układu spełniające warunki początkowe $x(0) = x_0,\ y(0) = y_0$, ma postać

$$\begin{cases} x(t) &= & x_0 \cos 2t + y_0 \sin 2t \\ y(t) &= & -x_0 \sin 2t + y_0 \cos 2t \end{cases}$$

Dane jest małe $\epsilon > 0$. Szukane jest δ takie, że $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} < \delta$. Dla dowolnego $t \geq 0$ mamy

$$\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \sqrt{(x_0 \cos 2t + y_0 \sin 2t)^2 + (-x_0 \sin 2t + y_0 \cos 2t)^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

wiec wystarczy przyjąc $\delta = \epsilon$. Zatem początek układu współrzędnych jest stabilnym punktem równowagi. Nie jest natomiaast asymtotycznie stabilny, gdyż nie istnieja granice

$$\lim_{\to\infty} x(t) = \lim_{\to\infty}(x_0 \cos 2t + y_0 \sin 2t)$$
$$\lim_{\to\infty} y(t) = \lim_{\to\infty}(-x_0 \sin 2t + y_0 \cos 2t).$$

(d) Niech

$$\begin{cases} x' &= -3x + 4y \\ y' &= x - 3y \end{cases}$$

Dla rozważanego układu równań jedynym punktem równowagi jest punkt $(x^*, y^*) = (0, 0)$. Ponadto rozwiązanie tego układu spełniające warunki początkowe $x(0) = x_0,\ y(0) = y_0$, ma postać

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{1}{2}(2y_0 + x_0)e^{-t} - \frac{1}{2}(2y_0 - x_0)e^{-5t} \\ y(t) &= \frac{1}{4}(2y_0 + x_0)e^{-t} + \frac{1}{4}(2y_0 - x_0)e^{-5t} \end{cases}$$

Dane jest małe $\epsilon > 0$. Szukane jest δ takie, że $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} < \delta$ Dla dowolnego $t \geq 0$ mamy

$$x(t)^2 + y(t)^2 = \frac{1}{4}\left(5(2y_0 + x_0)e^{-2t} + 5(2y_0 - x_0)e^{-10t} - 6(2y_0 + x_0)(2y_0 - x_0)e^{-6t}\right) \tag{2.6}$$

Łatwo pokazać że prawa strona 2.6 jest funkcją malejącą zmiennej t dla $t \geq 0$. Zatem

$$x(t)^2 + y(t)^2 \leq x(0)^2 + y(0)^2 = x_0^2 + y_0^2$$

dla $t \geq 0$. Wystarczy znowu przyjąc $\delta = \epsilon$. Pokazaliśmy, że początek układu współrzędnych jest stabilnym punktem równowagi. Ponadto

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{2}(2y_0 - x_0)e^{-t} - \frac{1}{2}(2y_0 - x_0)e^{-5t}\right] = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{4}(2y_0 + x_0)e^{-t} + \frac{1}{4}(2y_0 - x_0)e^{-5t}\right] = 0$$

Początek układu współrzędnych jest aymptotycznie stabilny.

2.2 Klasyfikacja punktów równowagi

Podamy klasyfikację punktów równowagi na płaszczyźnie prostych układów liniowych (tzn. takich dla których macierz układu jest nieosobliwa).

Wartości własne	**Nazwa**	**Stabilność**
Rzeczywiste różne λ_1, λ_2		
$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$	węzeł	niestabilny
$\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$	węzeł	asymptotycznie stabilny
$\lambda_1\lambda_2 < 0$	siodło	niestabilny
Rzeczywiste równe $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$		
$\lambda > 0$, 1 wektor własny	węzeł zdegenerowany	niestabilny
$\lambda < 0$, 1 wektor własny	węzeł zdegenerowany	asymptotycznie stabilny
$\lambda > 0$, 2 wektory własne	węzeł gwiaździsty	niestabilny
$\lambda < 0$, 2 wektory własne	węzeł gwiaździsty	asymptotycznie stabilny
zespolone $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ gdzie $\beta \neq 0$		
$\alpha > 0$	ognisko	niestabilny
$\alpha < 0$	ognisko	asymptotycznie stabilny
$\alpha = 0$	centrum	stabilny

Podamy teraz przykłady równań ilustrujące podaną wyżej klasyfikacje.

1. ***Węzeł niestabilny***

$$\begin{cases} x' &= 5x + 4y \\ y' &= x + 2y \end{cases}$$

2. ***Węzeł asymptotycznie stabilny***

$$\begin{cases} x' &= -2x + 3y \\ y' &= x - 3y \end{cases}$$

Portret fazowy

3. ***Siodło niestabilne***

$$\begin{cases} x' &= 4x - 3y \\ y' &= 5x - 4y \end{cases}$$

Portret fazowy

4. ***Węzeł zdegenerowany niestabilny***

$$\begin{cases} x' &= 3x - 4y \\ y' &= x - y \end{cases}$$

Portret fazowy

5. ***Węzeł zdegenerowany asymptotycznie stabilny***

$$\begin{cases} x' &= x - 4y \\ y' &= 4x - 7y \end{cases}$$

Portret fazowy

6. ***Węzeł gwiaździsty niestabilny***

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= y \end{cases}$$

Portret fazowy

7. ***Węzeł gwiaździsty asymptotycznie stabilny***

$$\begin{cases} x' &= -x \\ y' &= -y \end{cases}$$

Portret fazowy

8. ***Ognisko niestabilne***

$$\begin{cases} x' &= x - y \\ y' &= x + y \end{cases}$$

Portret fazowy

9. ***Ognisko asymptotycznie stabilne***

$$\begin{cases} x' &= x - 5y \\ y' &= x - 3y \end{cases}$$

Portret fazowy

10. ***Centrum***

$$\begin{cases} x' &= x + 2y \\ y' &= -5x - y \end{cases}$$

Portret fazowy

Zajmiemy się teraz przypadkiem trójwymiarowym. Rozpatrzmy układ równań postaci

$$X' = AX.$$

Załóżmy, że A ma jednokrotne wartości własne. Wtedy układ rozpada sie na produkt jednowymiarowego i dwuwymiarowego układu. Wielomian charakterystyczny jest stopnia 3 ma zatem 3 różne pierwiastki rzeczywiste $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ lub jeden rzeczywisty λ_1 i dwa zespolone sprzężone $\lambda_2, \lambda_3 = \overline{\lambda_2}$. Możliwe są zatem następujące przypadki.

1. $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ (kontrakcja wzdłuż trzech kierunków odpowiadających wartościom $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

2. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$ (kontrakcja wzdłuż dwóch kierunków odpowiadających wartościom λ_1, λ_2 i rozciąganie wzdluż trzeciego λ_3)

3. $\mathrm{Re}\lambda_{1,2} < \lambda_3 < 0$ (kontrakcja wzdłuż kierunku odpowiadającego wartości λ_3 oraz silniejsza kontrakcja wraz z obrotem w płaszczyźnie odpowiadającej wartościom λ_1, λ_2

4. $\lambda_3 < 0\mathrm{Re}\lambda_{1,2} < 0$ (kontrakcja wzdłuż kierunku odpowiadającego wartości λ_3 oraz słabsza kontrakcja wraz z obrotem w płaszczyźnie odpowiadającej wartościom λ_1, λ_2

5. $\mathrm{Re} < \lambda_{1,2} < 0 < \lambda_3$ (rozciąganie wzdłuż kierunku odpowiadającego wartości λ_3 oraz kontrakcja wraz z obrotem w płaszczyźnie odpowiadającej wartościom λ_1, λ_2

6. $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ (rozciąganie wzdłuż trzech kierunków odpowiadających wartościom $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

7. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 > \lambda_3$ (rozciąganie wzdłuż dwóch kierunków odpowiadających wartościom $\lambda_1, \lambda 2$ i kontrakcja wzdluż trzeciego λ_3)

8. $0 < \lambda_3 < \mathrm{Re}\lambda_{1,2}$ (rozciąganie wzdłuż kierunku odpowiadającego wartości λ_3 oraz silniejsza rozciąganie wraz z obrotem w płaszczyźnie odpowiadającej wartościom λ_1, λ_2

9. $0 < \mathrm{Re}\lambda_{1,2} < \mathrm{Re}\lambda_3$ (rozciąganie wzdłuż kierunku odpowiadającego wartości λ_3 oraz slabsze rozciąganie z obrotem w płaszczyźnie odpowiadającej wartościom λ_1, λ_2

Ta klasyfikacja nie obejmuje także przypadków zdegenerowanych gdy np. $\lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 = \overline{\lambda_3} \in \mathbb{C}$ oraz $l_1 = \mathrm{Re}\lambda_2 = \mathrm{Re}\lambda_3$.

3 Dyfeomorfizmy i potoki

3.1 Rozmaitości różniczkowe

Definicja 3.1. *Przestrzeń topologiczną Hausdorffa M nazywamy rozmaitością różniczkową klasy C^r, $0 \leq r \leq \infty$ i wymiaru $m < \infty$ jeżeli istnieje pokrycie M zbiorami otwartymi $\{U_\alpha\}$ i rodzina homeomorfizmów $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^m$ taka, że $V_\alpha = \phi_\alpha(U_\alpha)$ jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^m$. Parę (U_α, ϕ_α) nazywamy mapą. Mapy (U_α, ϕ_α), (U_β, ϕ_β) nazywamy zgodnymi, jeśli*

- $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$
- *odwzorowania* $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$
  i $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$
  są dyfeomorfizmami klasy C^r.

Zbiór $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ nazywamuy atlasem. Dwa atlasy nazywamy równoważnymi gdy ich suma mnogościowa jest atlasem tzn. jeżeli dowolna mapa pierwszego atlasu jest zgodna z dowolną mapą drugiego atlasu. Strukturę różniczkową rozmairości M nazywamy klasę równoważności atlasów.

Definicja 3.2. *Niech M_1, M_2 będą rozmaitościami różniczkowalnymi klasy C^r. Odwzorowanie $f : M_1 \to M_2$ nazywamy różniczkowalnym klasy C^r jeśli w lokalnych współrzędnych na M_1 i*

M_2 jest klasy C^r tzn. jeśli $\phi_1 : U_1 \to V_1 \subset I\!R^m$, $\phi_2 : U_2 \to V_2 \subset I\!R^m$ są lokalnymi mapami i $x \in U_1, f(x) \in U_2$, wówczas $\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1} : V_1 \to V_2$ ma być różniczkowalne klasy C^r.

Definicja 3.3. *Krzywą na rozmaitości M wychodzącą w chwili $t = 0$ z punktu $x \in M$ nazywamy odwzorowanie różniczkowalne klasy C^r $\gamma : I \to M$, $I \subset I\!R$ takie, że $\gamma(0) = x$. Niech x_i, $i = 1, \ldots, m$ oznaczają lokalne wspólrzedne w otoczeniu $x \in M$. Wtedy*

$$v_i := \frac{d}{dt}_{|t=0}(x_i \circ \gamma) \quad inaczej \quad v_i = x'_{i|t=0}$$

oznacza i-tą współrzędną wektora prędkości krzywej γ punkcie x. (zw. też wektorem stycznym do tej krzywej w punkcie x).

Definicja 3.4. *Przestrzenią styczną do rozmaitości M w punkcie x nazywamy zbiór wszystkich wektorów prędkości krzywych wychodzących z punktu x. Przestrzenią styczną do rozmaitości M w punkcie x oznaczamy symbolem T_xM. Jej elementy nazywamy wektorami stycznymi. Przestrzeń T_xM ma strukturę przestrzeni liniowej.*

Definicja 3.5. *Wiązką styczną nazywamy sumę przestrzeni stycznych do rozmaitości M we wszystkich jej punktach*

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M = \{(x, v) : \ x \in M, v \in T_x M\}$$

Twierdzenie 3.6. *TM jest rozmaitością różniczkową klasy C^r wymiaru $2m$.*

Istnieją dwa naturalne odwzorowania $\mathbf{i} : M \to TM, i(x) = (x, 0)$ (przekrój zerowy wiązki) oraz rzut $\mathbf{p} : TM \to M$, $p((x, v)) = x$.

Definicja 3.7. *M- rozmaitość różniczkowa klasy C^r, $f : M \to M$ będzie odwzorowanie różniczkowalne klasy C^r. Pochodną odwzorowania f w punkcie $x \in M$ nazywamy odwzorowanie $f_* : T_x M \to T_{f(x)} M$ które przeprowadza wektor prędkości v krzywej $\gamma : I \to M$ wychodzącej z punktu x w wektor prędkości krzywej $f \circ \gamma : I \to M$ wychodzącej z $f(x)$ tzn.*

$$f_{*|x} \left(\frac{d\gamma}{dt}_{|t=0} \right) = \frac{d}{dt}_{|t=0} (f \circ \gamma)$$

$\tilde{x} = \psi(x) = [\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m]$ - punkt x zapisany w lokalnych współrzędnych
$\tilde{f} = \phi(x) = [\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_m]$- odwzorowanie f zapisane w lokalnych współrzędnych

$$f_* = Df = \left[\frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial \tilde{x}_i} \right]_{i,j=1,\ldots,m}$$

f_*- macierz Jacobiego zapisana w lokalnych współrzeędnych, $v = [v_1, \ldots, v_m]$

$$f_*(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial \tilde{x}_i} \tilde{v}_i,$$

$\tilde{\vec{v}} = [\tilde{v} - 1, \ldots, \tilde{v}_m]$ -wektor $\vec{v}$ zapisany w olkalnych współrzędnych.

Definicja 3.8. *Polem wektorowym v klasy C^r na rozmaitości M nazywamy odwzorowanie $v : M \to TM$ takie, że $\mathbf{p} \circ \mathbf{v} : M \to M$ jest identycznością tzn $p(v(x)) = x$*

Przestrzeń pól wektorowych klasy C^r zdefiniowanych na M znaczamy symbolem $C^r(TM)$.

3.2 Działanie grup na rozmaitościach

Definicja 3.9. *Niech M oznacza zbiór. Przekształceniem $T : M \to M$ nazywać będziemy odwzorowanie różnowartościowe.*

Definicja 3.10. [**Działaniem grupy G na zbiorze M.**] *Jeśli każdemu elementowi grupy $g \in G$ przyporządkowany jest przekształcenie $T_g : M \to M$, produktowi dowolnych dwóch elementów z G odpowiada produkt przekształceń odpowiadających tym elementom*

$$T_{fg} = T_f T_g$$

oraz elementowi odwrotnemu odpowiada przekształcenie odwrotne do przekształcenia przyporządkowanego temu elementowi

$$T_{g^{-1}} = T_g^{-1},$$

to powiemy że grupa G działa na M.

Uwaga 3.11. *Działanie grupy G na zbiorze M jest homomorfizmem grupy G w grupę wszystkich przekształceń zbioru M.*

Definicja 3.12. *Jednoparametrowa grupą przekształceń zbioru nazywamy działanie $I\!R$ (grupa abelowa ze względu na dodawanie) na zbiorze. Zazwyczaj oznaczamy ją następująco $\{\phi_t\}_{t \in I\!R}$.*

Definicja 3.13. *Jednoparametrowa grupą przekształceń zbioru M nazywamy także* ***potokiem*** *na przestrzeni fazowej M.*

Definicja 3.14. ***Działanie grupy* G *na zbiorze* M *nazywamy jednoparametrową grupą przekształceń z dyskretnym czasem.*** *Dla takiego działania*

$$T_n = (T)^n,$$

czyli jest n*-tą iterację* T*.*

Definicja 3.15. *Niech* M *będzie gładką rozmaitością rózniczkową. Jednoparametrową grupą dyfeomorfizmów rozmaitości* M *nazywamy jednoparametrową grupę przekształceń* $\{\phi_t\}_{t\in \mathbb{R}}$ *której elementami są dyfeomorfizmy* $\phi_t : M \to M$ *taką, że* $\phi : \mathbb{R} \times M \ni (t,x) \to \phi_t(x) \in M$ *zależy gładko od obu argumentów.*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \phi(t,\cdot) = \phi_t : M \to M \quad \textit{dyfeomorfizm}$$

$$\phi(t,x_0) : \mathbb{R} \to M \quad \textit{trajektoria punktu } x_0 \in M$$

Uwaga 3.16. ***Odtąd potokiem na rozmaitości* M *nazywać będziemy jednoparametrową grupą dyfeomorfizmów rozmaitości* M*.***

Przykłady

- $M = \mathbb{R} \quad \phi_t(x) = e^{kt}x$ (rozciąganie)
- $M = \mathbb{R}^2$

$$\phi_t(x,y) = \begin{bmatrix} \cos t \sin t \\ -\sin t \cos t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

czyli ϕ_t jest obrotem o kąt t.

3.3 Związek między potokami a polami wektorowymi

Definicja 3.17. *Niech* $\{\phi_t\}_{t\in R}$ *potok dyfeomorfizmów na rozmaitości* M*. Ponieważ* $\{\phi_t(x)\}_{t\in R}$ *zależy gładko od* x *i* t *to możemy policzyć pochodną*

$$\vec{X}(x) = \frac{d}{dt}_{|t=0}(\phi_t(x))$$

Wektor $\vec{X}$ *nazywamy wektorem prędkości potoku na przestrzeni fazowej* M*. Tak otrzymujemy gładkie pole wektorowe na* M*.*

Niech U oznacza otwarty podzbiór $\mathbb{R}^n$ lub $U = TM$-wiązka styczna do rozmaitości M, o której zakładamy, że jest gładka.

Definicja 3.18. *Rozpatrujemy nieautonomiczne pole vektoroe* $X : I \times M \to TM$

$$I \times M \ni (t, x) \to X(t, x) \in T_x M.$$

Takie pole wektorowe zadaje układ równań różniczkowych zwyczajnych na rozmaitości M *tzn.*

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x). \tag{3.1}$$

Gdy pole wektorowe $X(x, t) = X(x)$*, czyli nie zależy od czasu, to otrzymamy automiczny układ równań różniczkowych zwyczajnych na rozmaitości* M*.*

$$\frac{dx}{dt} = X(x). \tag{3.2}$$

Definicja 3.19. *Rozwiązaniem równania spełniającym warunek początkowy*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi(t) = X(t, \phi(t)) \\ x_0 = \phi(t_0) \end{cases} \tag{3.3}$$

nazywamy krzywą $\phi : J \to M$*,* $J \subset I$ *taką że* $\frac{d}{dt}\phi(t) = X(t, \phi(t))$ *oraz* $\phi(t_0) = x_0$*.*

Definicja 3.20. *Punktem krytycznym pola wektorowego* $X \in C^1(TM)$ *nazywamy punkt* $x_0 \in M$ *taki, że* $X(t, x_0) \equiv 0$ *dla każdego* $t \in \mathbb{R}$*. Wtedy* $\phi(t) \equiv x_0$ *nazywamy położeniem równowagi pola* X*.*

Twierdzenie 3.21. [**Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań**] *M- gładka rozmaitośc,* $X \in C^1(TM)$*- pole wektorowe klasy* C^1*. Rozpatrzmy równanie zadane przez* X *tzn.*

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = X(t, \phi(t)), \tag{3.4}$$

gdzie $(t^*, x^* = \phi(t)) \in I \times M$*,* $x^* \in M$*. Wtedy istnieją otoczenia* $I_0 \subset I$ *punktu* t^* *oraz* $U \subset M$ *punktu* x^* *takie, że jeśli* $x_0 \in U$*, to zagadnienie początkowe* $x(t_0) = x_0$ *rownania (3.4) ma dokładnie jedno rozwiązanie* $\phi(t) = \phi(t, x_0), t \in I_0$*. Jeśli pole wektorowe jest analityczne, to* $\phi(t, x_0)$ *też jest analityczne.*

Rozwiąznia $\phi_t(x)$ tworzą lokalny potok tzn. $\phi_t(x) \circ \phi_s(x) = \phi_{t+s}(x)$ dla $t, s, t+s \in I_0$

Uwaga 3.22. *Ponieważ pole X jest klasy C^1, a rozmaitość jest klasy C^1, to lokalne mapy są dyfeomorfizmami. Stąd w lokalnych współrzędnych pole $\tilde{X}$ jest klasy C^1, więc spełniony jest lokalnie warunek Lipschitza ze względu na zmienną $\tilde{x} \in I\!R^n$. Zatem w danej mapie spełnione są założenia twierdzenia Picarda-Lindölefa z czego wynika teza twierdzenia.*

Twierdzenie 3.23. [Twierdzenie o zależności od warunków początkowych] *Jeśli w założeniach Twierdzenia 3.21 pole wektorowe X będzie klasy C^2, to $\phi(t, x_0)$ jest klasy C^1 (ze względu na (t, x_0).) Ogólniej X klasy C^n, to potok jest klasy C^{n-1}.*

Twierdzenie 3.24. [Twierdzenie o zależności od parametrow] *M-gładka rozmaitość, $X \in C^r(TM), r \geq 2$- pole wektorowe klasy C^r. Rozpatrzmy równanie zadane przez X tzn.*

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = X(t, \phi(t), \lambda), \tag{3.5}$$

gdzie $(t, x^*, \lambda) \in I \times M \times V$, $x^* \in M, \lambda \in V \subset I\!R^k$. Wtedy rozwiązanie równiania (3.5) są klasy C^{r-1} ze względu na wszystkie zmienne.

Twierdzenie 3.25. *$M \subset I\!R^n$* **zwarta** *rozmaitość różniczkowa klasy $C^r, r \geq 2$, $dimM = m < n$, pole wektorowe $X \in C^r(TM), r \geq 2$. Istnieje wówczas jednoparametrowa grupa dyfeomorfizmów $\phi : I\!R \times M \to M$ dla której pole X jest polem prędkości potoku $\{\phi_t\}_{t \in R}$ tzn.*

$$X(x) = \frac{d(\phi_t(x))}{dt}_{|t=0}.$$

Uwaga 3.26. *Założenie zwartości rozmaitości jest istotne.*

Ponieważ X jest zwarta, to mamy pokrycie X za pomocą skończenie wielu zbiorów (U_i, ψ_i). W każdej mapie mamy jednoznaczność rozwiązań, to dla to w części wspólnej map jednoczność gwarantuje, że rozwiązania muszą być takie same czyli jedno jest przedłużezeniem drugiego. Stąd potok lokalny przedłuża się do globalnego.

3.4 Punkty krytyczne pól wektorowych

Niech X będzie polem wektorowym zdefiniowanym w otoczeniu 0 w $\mathbb{R}^n$, $X(0) = 0$, ϕ_t oznacza potok generowany przez pole X

$$\phi_t'(x) = X(\phi_t(x)) \tag{3.6}$$

Rożniczkujemy (3.6) względem zmiennej przestrzennej x.

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi_t'(x) = \frac{\partial}{\partial x}X(\phi_t(x)) \tag{3.7}$$

Możemy zmienić kolejność rórniczkowania w (3.7) (uzasadnić).

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\phi_t(x) = \frac{\partial}{\partial x}X(\phi_t(x)) = DX(\phi_t(x))\frac{\partial}{\partial x}\phi_t(x)$$

Oznaczmy

$$A(t) = \frac{\partial}{\partial x}\phi_t(x)_{|x=0}$$

Wówczas $A(t)$ spełnia równanie rórniczkowe

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}A(t) = DX(0)A(t) \\ \phi_t(0) = 0 \end{cases}$$

Jego rozwiązania są postaci

$$A(t) = e^{tDX(0)}A(0),$$

gdzie

$$A(0) = \frac{\partial}{\partial x}\phi_0(x) = I.$$

ponieważ $\phi_0(x)$ jest identycznością. Stąd

$$A(t) = e^{tDX(0)}.$$

Uwaga 3.27. *Z wcześniejszych rachunków wynika, że* $\phi_t(0) = 0$ *dla każdego* $t \in \mathbb{R}$.

Definicja 3.28. *Przekształcenie liniowe* $DX(0)$ *(czasami piszemy też* D_0X*) nazywamy* ***hesjanem pola*** X *w punkcie* 0.

4 Hiperboliczność

4.1 Punkty hiperboliczne dyfeomerfizmów i potoków

Definicja 4.1. *Przekształcenie liniowe* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *nazywamy* ***hiperbolicznym*** *jeśli nie ma ono wartości własnych o module 1.*

Definicja 4.2. *Punkt stały* x_0 *dyfeomorfizmu* f *(określonego na otwartym podzbiorze w* R^n*) nazywamy hiperbolicznym, jeżeli* $D_{x_0}f$ *jest przekształcenie hiperbolicznym. Punkt okresowy dyfeomorfizmu* f *(określonego na otwartym podzbiorze w* R^n*) nazywamy* ***hiperbolicznym****, jeśli jest on hiperbolicznym punktem stałym dyfeomorfizmu* f^n *(czyli* $D_{x_0}f^n$ *jest przekształcenie hiperbolicznym.)*

Definicja 4.3. $M \subset R^n$ *gładka zwarta rozmaitość,* $f : M \to M$ *gładki dyfeomorfizm,* $x_0 \in M$ *jest punktem okresowym hiperbolicznym okresu n jeśli* $Df^n : T_pM \to T_pM$ *jest hiperbolicznym przekształceniem liniowym.*

Przyklady Niech $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$L = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

1. Pokazać, że L jest przekształceniem z torusa $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ na T^2 wtedy i tylko wtedy gdy $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

2. Pokazać, że L jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym torusa T^2 wtedy i tylko wtedy gdy gdy $detL = \pm 1$

3. Załóżmy, że L jest hiperboliczny czyli nie ma wartości własnych o module 1. Pokazać, że istnieja dwie wartości własne rzeczywiste λ, μ takie, że $|\lambda| < 1$, $|\mu| > 1$. Niech u i v będą wartościami własnymi odpowiadającymi tym wartościom własnym tzn.

$$L(\vec{u}) = \lambda\vec{u}, \quad L(\vec{v}) = \mu\vec{v}$$

Wtedy proste

$$L^- = \{t\vec{u} : \quad t \in \mathbb{R}\}, \quad L^+ = \{t\vec{v} : \quad t \in \mathbb{R}\}$$

są podprzestrzeniami odpowiadającymi tym wartościom własnym. Pokzać, że jeśli Π jest rzutem

$$\Pi : \mathbb{R}^2 \to T^2, \quad \Pi(x, y) = (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}),$$

to obrazy prostych L^-, L^+ są gęsto nawinięte na torusie, dlatego nazywamy je ***obmotkami.***

Uwaga 4.4. *Przekształcenie L opisane w powyższym przykładzie nazyweamy **algebraicznym automorfizmem torusa***

Definicja 4.5. *Jeśli X jest polem wektorowym klasy C^1, określonym w otoczeniu $x_0 \in R^n$ i $X(x_0) = 0$, to x_0 nazywamy **niezdegenerowanym** punktem krytycznym, jeśli przekształcenie liniowe $DX(x_0)$ (hesjan) jest odwracalne.*

Definicja 4.6. *Jeśli X jest polem wektorowym klasy C^1, określonym w otoczeniu $x_0 \in R^n$ i $X(x_0) = 0$, to x_0 nazywamy **hiperbolicznym** puktem krytycznym jeśli przekształcenie liniowe $DX(x_0)$ (hesjan) nie ma wartości własnych o części rzeczywistej równej zero.*

Uwaga 4.7. *Jeśli x_0 jest hiperbolicznym punktem krytycznym pola X a ϕ_t potokiem generowanym przez to pole, to punkt x_0 jst puktem stałym hiperbolicznym dyfeomorfizmu ϕ_t czyli $D\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest przekształceniem hiperbolicznym (tzn. nie posiada wartości własnych o module równym 1).*

Dowód Ponieważ

$$D\phi_t(x_0) = e^{tDX(x_0)},$$

więc każda wartość własna λ operatora $D\phi_t(x_0)$ ma postać

$$\lambda = e^{t\mu},$$

gdzie μ jest wartościa własną hesjanu $DX(x_0)$. Stąd jeśli

$$\mathrm{Re}\mu \neq 0 \quad to \quad |\lambda| \neq 1$$

■

Definicja 4.8. *Wartości własne hesjanu pola wektorowego w punkcie krytycznym nazywamy **wykładnikami charakterystycznymi** punktu krytycznego.*

Definicja 4.9. *$M \subset \mathbb{R}^n$ gładka zwarta rozmaitość różniczkowa, X gładkie pole wektorowe zdefiniowane na M, $X(x_0) = 0$, ϕ_t potok pola wektorowego generowany przez X. Wtedy w lokalnych współrzędnych otrzymamy pole $\tilde{X}$ określone na otoczeniu punktu $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Punkt x_0 jest krytycznym punktem hiperbolicznym pola X jeśli $\tilde{x}_0$ jest hiperbolicznym punktem krytycznym pola $\tilde{X}$.*

Przykład Rozpatrzmy pole wektorowe

$$X(x, y) = [2y^2, 4x - 4x^3]$$

Hesjan tego pola wektorowego dany jest macierzą

$$DX(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 - 12x^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Pole wektorowe ma 3 punkty krytyczne $(0, 0)$, $(-1, 0)$ i $(1, 0)$. Punkt $(0, 0)$ jest hiperboliczny bo wykładniki charakterysyczne są postaci $\pm\sqrt{2}$ zaś punkty $(-1, 0)$ i $(1, 0)$ nie są hiperboliczne bo wykładniki charakterystyczne są postaci $\pm 4i$.

5 Linearyzacja

5.1 Zagadnienie linearyzacji pól wektorowych i dyfeomorfizmów

Dane jest pole wektorowe X w $\mathbb{R}^n$ klasy C^1 (przyjmijmy, że zdefiniowane w otoczeniu 0). Zakładamy, że $X(0) = 0$ (zatem 0 jest punktem krytycznym pola)

Dla zilustrowania problemu przyjmijmy, że pole X jest dwuwymiarowe tn. ze zadane jest w $\mathbb{R}^2$. Wtedy

$$X = (f, g)$$

oraz

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial x}y + o((x, y))$$

$$g(x, y) = g(0, 0) + \frac{\partial g}{\partial x}x + \frac{\partial g}{\partial x}y + o((x, y))$$

Niech

$$A = \begin{bmatrix} \partial_x f & \partial_y f \\ \partial_x g & \partial_y g \end{bmatrix}$$

Zatem

$$X(x, y) = A(x, y) + o((x, y))$$

Problem 1
Czy można porównać potok pola wektorowego X w otoczeniu punktu krytycznego (miejsca zerowego) z potokiem pola liniowego $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$?

Przyklad 1 Rozpatrzmy równanie opisujące ruch wahadła fizycznego

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin x \end{cases} \tag{5.1}$$

Czyli pole wektorowe wyraża się wzorem

$$X(x, y) = (y, -\sin x).$$

Miejscami zerowymi pola X czyli punktami krytycznymi są punkty postaci:

$$(k\pi, 0), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Z prawa zachowania energii wynika, że układ zachowuje energię oraz

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}y^2 - \cos x.$$

Pokażemy że funkcja

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x$$

jest całką pierwsza równania (5.1). Policzymy w tym celu pochodną po czasie funcji $H(x(t), y(t))$.

$$\frac{d}{dt}H(x, y) = yy' + \sin xx' = x'(-\sin x) + \sin xx' = 0$$

czyli $H(x, y) = \text{const}$. Krzywe fazowe równania leżą na poziomicach H czyli powierzchni o równaniu $H(x, y) = C$ (powierzchni o stałej energii)

Rys. 1 Trajektorie równania (5.1)

Zauważmy, że punktowi krytycznemu $(\pi, 0)$ odpowiada poziomica energii $H(x, y) \equiv 1$, zaś $(0, 0)$ wartość $H(x, y) \equiv -1$.

Porównamy trajektorie układów (5.1) i (5.2) wokół punktu $(\pi, 0)$. Policzymy $A = D_0X$ gdzie $X(x, y) = (y, -\sin x)$ i

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & 0 \end{bmatrix}$$

w punkcie $(\pi, 0)$

$$A(\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

oraz w punkcie $(0, 0)$

$$A(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozpatrzmy równanie różniczkowe liniowe

$$X' = AX,$$

gdzie

$$A(\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

czyli

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X. \tag{5.2}$$

Obliczamy wartości własne

$$det(A - \lambda E) = det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1 + 0,$$

czyli

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1.$$

Znajdziemy teraz wektory własne odpowiadające tym wartościom własnym.

Dla $\lambda_1 = 1$

$$(A - \lambda E)\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Otrzymamy następujący układ równań.

$$-v_{11} + v_{12} = 0 \Longleftrightarrow v_{11} = v_{12}$$

$$v_{11} - v_{12} = 0 \Longleftrightarrow v_{11} = v_{12}$$

Zatem wektorem własnym wartości własnej λ_1 jest wektor postaci

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Stąd funkcja

$$y_1(t) = e^{\lambda_1}\vec{v}_1 = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix}.$$

jest rozwiązaniem układu (5.2).

Analogicznie dla $\lambda_2 = -1$

$$(A - \lambda E)\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Otrzymamy układ równań postaci:

$$v_{21} + v_{22} = 0 \Longleftrightarrow v_{21} = -v_{22}$$

$$v_{21} + v_{22} = 0 \Longleftrightarrow v_{21} = v_{22}$$

Wektorem własnym wartości λ_2 jest wektor

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Zatem fukcja

$$y_2(t) = e^{\lambda_2}\vec{v}_2 = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

jest rozwiązaniem układu. Wtedy rozwiązania równania (5.2) mają postać

$$X(t) = y_1(t)C_1 + y_2(t)C_2 = \begin{bmatrix} C_1e^t + C_2e^{-t} \\ C_1e^t - C_2e^{-t} \end{bmatrix}$$

Jeśli $C_1 = C_2 = 0$ to $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ dla $t \in \mathbb{R}$. Zatem trajektoria tego układu $\{(x(t), y(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ redukuje się do puntu $(0,0)$. Jeśli $C_1 = 0, C_2 \neq 0$ to trajektoria ma postać $\{(x(t), y(t)) : t \in \mathbb{R}\} = \{(C_2e^{-t}, -C_2e^{-t} : t \in \mathbb{R}\}$. Zatem jest półprostą $\{(x, -x) : x > 0\}$ gdy $C_2 > 0$ lub półprostą $\{(x, -x) : x < 0\}$ gdy $C_2 < 0$. Analogicznie, gdy $C_1 \neq 0, C_2 = 0$ to trajektoriami są dwie półproste $\{(x, x) : x > 0\}$ gdy $C_1 > 0$ lub półprostą $\{(x, x) : x < 0\}$ gdy $C_1 < 0$. Zaś dla $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$ trajektoriami są hiperbole

$$\frac{x^2}{4C_1C_2} - \frac{y^2}{4C_1C_2} = 1$$

.

Rys. 2 Trajektorie układu (5.2) w otoczeniu pinktu $(\pi, 0)$ podobne są do trajektorii na rys.1 w otoczeniu tego punktu.

Porównamy z kolei trajektorie układów (5.1) i (5.2) wokół punktu $(0,0)$.
Dla punktu $(0,0)$ macierz A wynosi

$$A(0,0)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

Rozpatrujemy równanie różniczkowe liniowe

$$X'=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X$$

i szukamy wartości własnych.

$$det(A-\lambda E)=det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}=\lambda^2+1=0$$

czyli

$$\lambda_1=i, \quad \lambda_2=-i$$

Znajdziemy teraz wektory własne odpowiadające tym wartościom własnym.
Dla $\lambda_1=i$

$$(A-\lambda E)\vec{v}_1=\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Otrzymamy następujący układ równań.

$$-iv_{11}+v_{12}=0 \Longleftrightarrow v_{12}=iv_{11}$$

$$-v_{11}-iv_{12}=0 \Longleftrightarrow v_{21}=iv_{11}$$

Zatem wektorem własnym wartości własnej λ_1 jest wektor postaci

$$\vec{v}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Do znalezienia rozwiązań wystarczy tylko wektor własny odpowiadający wartości własnej $\lambda_1=i$. Funkcje

$$y_1(t)=\mathrm{Re}(e^{\lambda t}\vec{v}_1), \quad y_2(t)=\mathrm{Im}(e^{\lambda t}\vec{v})$$

są liniowo niezależnymi rozwiązania (5.3).
Policzymy

$$e^{\lambda t}\vec{v}_1=(\cos t+i\sin t)\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos t+i\sin t \\ -\sin t+i\cos t \end{bmatrix}$$

$$y_1(t) = \mathrm{Re}(e^{\lambda t}\vec{v}_1) = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$$

$$y_2(t) = \mathrm{Im}(e^{\lambda t}\vec{v}_1) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

Rozwiązania równania (5.3) mają postać

$$X(t) = y_1(t)C_1 + y_2(t)C_2 = \begin{bmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ -C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{bmatrix}$$

Nietrudno policzyć że są to okręgi koncentryczne wokół zera.

Rys. 3 Trajektorie równania (5.3) są podobne do trajektorii równania (5.3) w otoczeniu punktu $(0, 0)$.

Przykład 2 Do zrobienia na ćwiczeniach.

$$\begin{cases} x' = y - x^3 \\ y' = -x \end{cases}$$

W tym przykladzie trajektorie równania zadania wokól punktów stacjonarnych nie są podobne do trajektorii pola liniowego.

Dany jest dyfeomorfizm ϕ w $I\!\!R^n$ klasy C^1 (przyjmijmy, że zdefiniowany w otoczeniu 0). Zakładamy, że $\phi(0) = 0$ (zatem 0 jest punktem stałym)

Dla zilustrowania problemu przyjmijmy, że dyfeomorfizm f jest zdefiniowany w $I\!\!R^2$. Wtedy

$$\phi = (\phi_1, \phi_2)$$

oraz

$$\phi_1(x, y) = \phi_1(0, 0) + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} x + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} y + o((x, y))$$

$$\phi_2(x, y) = \phi_2(0, 0) + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} x + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} y + o((x, y))$$

Niech

$$A = \begin{bmatrix} \partial_x \phi_1 & \partial_y \phi_1 \\ \partial_x \phi_2 & \partial_y \phi_2 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$\phi(x, y) = A(x, y) + o((x, y))$$

Problem 2
Na ile iterowanie ϕ jest podobne do iterowania przekształcenia liniowego A?

Odpowiedź na to pytanie poznamy w następnych dwóch rozdziałach.

5.2 Twierdzenie Grobmana-Hartmana dla dyfeomorfizmów w $\mathbb{R}^n$

Twierdzenie 5.1 (Grobmana-Hartmana). *F dyfeomorfizm klasy $C^r, r \geq 1$, określony na otoczeniu 0 w R^n i $F(0) = 0$. Zakładamy, że 0 jest hiperbolicznym punktem stałym. Wówczas istnieją otoczenia $U \ni 0$, $V \ni 0$ takie, że przekształcenia $F : U \to F(U)$ i $D_0F : V \to D_0F(V)$ są sprzężone topologicznie czyli następujący diagram komutuje.*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{F} & F(U) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ V & \xrightarrow{D_0F} & D_0F \end{array} \tag{5.4}$$

Dowód $D_0F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest przekształceniem liniowym. Jeśli wartości własne D_0F są rzeczywiste, to mamy następujący rozkład Jordana. Różnym wartościom własnym odpowiada następująca klatka Jordana,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

zaś wielokrotnym

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Jeśli mamy zespolone wartości, to

$$\begin{pmatrix} [\ ] & E & & & \\ & [\ ] & E & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [\ ] & E \end{pmatrix}$$

gdzie nawias kwadratowy oznacza macierz

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

oraz

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie A-operator liniowy $A : I\!R^n \to I\!R^n$, taki, że wszystkie wartości własne mają moduł < 1. Wtedy istnieje iloczyn skalarny w R^m taki, że dla normy wyznaczonej przez ten iloczyn skalarny mamy $||A|| < 1$.

Wtedy dostaniemy rozkład

$$R^n = U \oplus V = E^s \oplus E^u,$$

gdzie $U = E^s$ oznacza podprzestrzeń odpowiadającą wartościom własnym o module < 1, zaś $V = E^u$ oznacza podprzestrzeń odpowiadającą wartościom własnym o module > 1.

W U i V bierzemy takie iloczyny skalarne jak wynika to z zadania (należy zauważyć, że w przestrzeni V mamy, że B^{-1} ma wartości własne o module < 1). Definiujemy w $I\!R^n$ nowy iloczyn skalarny. Niech $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in U \oplus V$.

$$(u_1, v_1) \circ (u_2, v_2) := < u_1, u_2 >_u + < v_1, v_2 >_v$$

Wtedy

$$||(u, v)||^2 = ||u||_u^2 + ||u||_v^2$$

Ponieważ F jest dyfeomorfizmem, to istnieje $\delta > 0$ taka, że dla $x \in I\!R^n$

$$||D_0F(x)|| \geq \delta ||x||.$$

Zapiszemy F w nowych współrzędnych $(u, v) \in U \oplus V$ jako

$$F(u, v) = D_0F(u, v) + f(u, v)$$

Odwzorowanie f jest małe w otoczeniu 0 oraz $D_0 f = 0$. Zatem w małym otoczeniu 0 różniczka Df jest mała (bo f jest klasy C^1). Zapiszemy w nowych współrzednych

$$f = (f_1, f_2)$$

oraz

$$Df = \begin{bmatrix} \partial_u f_1 & \partial_v f_1 \\ \partial_u f_2 & \partial_v f_2 \end{bmatrix}.$$

Dobieramy małe otoczenie W punktu 0 tak aby w tym otoczeniu

$$||\partial_u f_i|| < \epsilon, ||\partial_v f_i|| < \epsilon, \qquad i = 1, 2$$

Wielkość ϵ zostanie ustalona później.

Sztucznie przedłużamy f do $\tilde{f}$ klasy C^1 określonego na $\mathbb{R}^n$ tak aby

$$||\partial_u f_i|| < \epsilon, \quad ||\partial_v f_i|| < \epsilon, \qquad i = 1, 2$$

zachodziło w większym otoczeniu $Z \supset W$ oraz $\tilde{f} \equiv 0$ poza $\overline{Z}$.

Rozpatrujemy

$$\tilde{F} = D_0 F + \tilde{f} \quad \tilde{F} = F \text{ na } W$$

Uwaga

- $\tilde{f}$ istnieje (aby je skonstruować należy skorzystać z gładkiego rozkładu jedynki)
- $\tilde{F}$ jest wzajemnie jednoznacznym przekształceniem z $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Szukamy h będącego sprzężeniem czyli takiego, że

$$\tilde{F} \circ h = h \circ D_0 \tilde{F}.$$

Poszukamy h jako małego zaburzenia I (identyczności) czyli

$$h = (I + g)$$

Rozpatrzmy przestrzeń

$$\mathcal{S} = \{g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : \text{ ciągłe } g(0) = 0, \lim_{x \to \infty} g(x) = 0\}$$

$\mathcal{S}$ jest przestrzenią zupełną z metryką 'sup'. Liczymy

$$\tilde{F} \circ (I+g) = (I+g) \circ D_0\tilde{F}$$

ale

$$\tilde{F} = D_0\tilde{F} + \tilde{f}.$$

Zatem

$$\begin{gathered} (D_0\tilde{F} + \tilde{f}) \circ (I+g) = (I+g) \circ D_0\tilde{F} \\ D_0\tilde{F} + D_0\tilde{F} \circ g + \tilde{f} \circ (I+g) = D_0\tilde{F} + g \circ D_0\tilde{F} \\ D_0\tilde{F} \circ g = g \circ D_0\tilde{F} - \tilde{f} \circ (I+g) \\ g = (D_0\tilde{F})^{-1} \circ (g \circ D_0\tilde{F} - \tilde{f} \circ (I+g)) \end{gathered} \tag{5.5}$$

Otrzymaliśmy, że g jest punktem stalym operatora $(D_0\tilde{F})^{-1} \circ (g \circ D_0\tilde{F} - \tilde{f} \circ (I+g))$.
W bazie Jordana macierz D_0F zapisze się następująco.

$$D_0F = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

gdzie $||A|| < 1$, $||B^{-1}|| < 1$ Wtedy

$$g = (g_1, g_2).$$

Z (5.5) wynika, że

$$g = \Big[A^{-1} \circ (g_1 \circ D_0\tilde{F} - \tilde{f}_1 \circ (I+g)), B^{-1} \circ (g_2 \circ D_0\tilde{F} - \tilde{f}_2 \circ (I+g))\Big]$$

$$g_2 = B^{-1} \circ (g_2 \circ D_0\tilde{F} - \tilde{f}_2 \circ (I+g)) \tag{5.6}$$

$$g_1 = A^{-1} \circ (g_1 \circ D_0\tilde{F} - \tilde{f}_1 \circ (I+g)) \tag{5.7}$$

Równanie (5.7) można zapisać następująco

$$g_1 = A \circ g_1 \circ D_0\tilde{F}^{-1} + \tilde{f}_1 \circ (I+g) \circ D_0\tilde{F}^{-1} \tag{5.8}$$

Szukamy $g = (g_1, g_2)$ takiego, żeby spełnione były równania (5.6) i (5.8) Rozpatrujemy nieliniowy operator H

$$H(g_1, g_2) = \Big[A \circ g_1 \circ D_0\tilde{F}^{-1} + \tilde{f}_1 \circ (I+g) \circ D_0\tilde{F}^{-1}, \quad B^{-1} \circ (g_2 \circ D_0\tilde{F} - \tilde{f}_2 \circ (I+g))\Big]$$

Pokażemy , że H jest kontrakcją. Weźmy dwa odwzorowania (g_1, g_2) i (h_1, h_2). Popatrzmy na drugą wspólrzędną operatora H

$$||B^{-1} \circ (g_2 \circ D_0\tilde{F} - \tilde{f}_2 \circ (I + g)) - B^{-1} \circ (k_2 \circ D_0\tilde{F} - \tilde{f}_2 \circ (I + k))||_v \leq$$

$$||B^{-1}||(\sup ||g_2 \circ D_0\tilde{F} - k_2 \circ D_0\tilde{F}||) + Lip(B^{-1} \circ \tilde{f}_2)||g - k||$$

$$\leq ||B^{-1}||||g_2 - k_2|| + \epsilon||g - k|| \tag{5.9}$$

gdzie ϵ pochodzi od szacowania pochodnych cząstkowych f_2. Jeśli dobierzemy je odpowiednio małe, to otrzymamy, że H jest kontrakcją ze względu na drugą współrzędną. (Wiemy, że $||B^{-1}|| < 1$)

Analogicznie szacując pierwsza wspólrzędną operatora H

$$||A \circ g_1 \circ D_0\tilde{F}^{-1} + \tilde{f}_1 \circ (I + g) - A \circ k_1 \circ D_0\tilde{F}^{-1} + \tilde{f}_1 \circ (I + k)||_u$$

$$\leq |A|||g_1 - k_1|| + \epsilon||g - k|| \tag{5.10}$$

Z (5.9) i (5.10) wynka, że

$$||H(g) - H(k)|| \max(||A||, ||B^{-1}||)||g - k|| + 4\epsilon||g - k||.$$

Z twierdzenia Banacha o punkcie stałym wynika, że istnieje dokładnie jedno g.

Pozostało pokazać, $h = (I + g)$ jest homeomorfizmem. Dowodzi się analogicznie przez pokazanie istnienia sprzężenia $\tilde{h}$ sprzęgającego w drugą stronę. ■

5.3 Twierdzenie Grobmana-Hartmana dla dyfeomorfizmów zdefiniowanych na rozmaitościach

Twierdzenie 5.2 (Grobmana-Hartmana). *$M \subset \mathbb{R}^n$ gładka rozmaitość różniczkowa, dim M=n, $f : M \to M$ gładki dyfeomorfizm, $p \in M$ punkt stały hiperboliczny f. tzn. $f(p) = p$ Wówczas istnieje otoczenie $U \ni p$ w M i otoczenie $V \ni 0$ w T_pM oraz homeomorfizm $h : U \to V$ taki, że przekształcenia $f : U \to f(U)$ i $D_pf : V \to T_p(M)$ są sprzężone topologicznie czyli następujący diagram komutuje.*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & f(U) \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ V & \xrightarrow{D_pf} & T_pM \end{array}$$

5.4 Twierdzenie Grobmana-Hartmana dla pól wektorowych

Twierdzenie 5.3 (Grobmana-Hartmana). *$M \subset \mathbb{R}^n$ gładka rozmaitość różniczkowa, dim M=m , $X : M \to M$ pole wktorowe klasy C^r, $r \geq 1$, $p \in M$ hiperboliczny punkt krytyczny. Wówczas istnieje otoczenie $U \ni p$ w M i otoczenie $V \ni 0$ w $\mathbb{R}^m$ oraz homeomorfizm $h : U \to V$ taki, że potoki (U, ϕ_t) i $(V, \psi_t = e^{tD\tilde{X}(0)})$ są sprzężone topologicznie czyli następujący diagram komutuje.*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\phi_t} & \phi_t(U) \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ V & \xrightarrow{\psi_t} & \psi_t(V) \end{array}$$

Uwaga 5.4. *Twierdzenie Grobmana Hartmana nazywa się twierdzeniami o lineryzacji. Mówi ono, że dla dyfeomorfizmów w otoczeniu punktu hiperbolicznego trajektorie dyfeomorfizmu zachowują się tak jak trajektorie pochodnej tego przekształcenia (które jest przekształceniem liniowym $\mathbb{R}^m$) w otoczeniu punktu 0. W przypadku potoków to oznacza, że trajektorie pola wektorowego $X \in C^r(TM), r \geq 1$, w otoczeniu punktu krytycznego p są topologicznie równoważne trajektoriom pola wektorowego generowanego przez hesjan $D\tilde{X}(0)$ w otoczeniu punktu 0 w $\mathbb{R}^m$. Dlaczego to twierdzenie jest takie ważne? Pole wektorowe X może być zdefiniowane* *za pomocą bardzo skomplikowanych funkcji. Wiadomo, że pole wektorowe generuje lokalnie automiczny układ równań różniczkowych na rozmaitości w otoczniu punktu p. Tymczsem jeśli punkt krytyczny p jest hiperboliczny, to istnieje taka topologiczna zamiana zmiennych lokalnych na rozmaitości (czyli homeomorfizm h), że w nowym układzie współrzędnych dostajemy równanie różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach. Jego rozwiązania tworzą potok ψ_t generowany przez hesjan $D\tilde{X}(0)$.*

6 Lokalne rozmaitości stabilne i niestabilne

6.1 Twierdzenie Hadamarda-Perrona dla dyfeomorfizmów zdefiniowanych na rozmaitościach

Niech M- gładka rozmaitość, $f \in Diff^r(M), r \geq 1$, $p \in M$ punkt stały hiperboliczny, U otoczenie punktu p.

Definicja 6.1. *Lokalną rozmaitością stabilną punktu p nazywamy zbiór*

$$W^s_{loc}(p) = \{x \in M : \forall n \geq 0, \quad f^n(x) \in U\}.$$

Lokalną rozmaitością niestabilną punktu p nazywamy zbiór

$$W^u_{loc}(p) = \{x \in M : \forall n \geq 0, \quad f^{-n}(x) \in U\}.$$

czyli $W^u_{loc}(p) = W^s_{loc}(p)$ dla f^{-1}.

Definicja 6.2. *Globalną rozmaitością stabilną punktu p nazywamy zbiór*

$$W^s(p) = \{x \in M : \lim_{n\to+\infty} f^n(x) \to p\}.$$

Globalną rozmaitością niestabilną punktu p nazywamy zbiór

$$W^u(p) = \{x \in M : \lim_{n\to-\infty} f^n(x) \to p\}.$$

Łatwo zauważyć, że

$$W^s(p) = \bigcup_{-\infty}^{+\infty} f^n(W^s_{loc}(p)) \quad W^u(p) = \bigcup_{-\infty}^{+\infty} f^n(W^u_{loc}(p))$$

Twierdzenie 6.3 (**Hadamarda-Perrona o lokalnej rozmaitości stabilnej**). *M- gładka rozmaitość, $f \in Diff^r(M), r \geq 1$, $p \in M$ punkt stały hiperboliczny, $E^s \subset T_p(M)$ podprzestrzeń odpowiadająca wartosciom własnym o module < 1. Wówczas istnieje otoczenie $U \subset M$ punktu p takie, że*

$$W^s_{loc}(p) = \{x \in M : \forall n \geq 0, \quad f^n(x) \in U\}$$

jest podrozmaitością klasy C^r w topologii indukowanej z M i $T_p(W^s_{loc}) = E^s$.

Analogiczne twierdzenie Hadamarda-Perrona jest prawdziwe dla lokalnych rozmaitości niestabilnych.

Twierdzenie 6.4 (**Hadamarda-Perrona o lokalnej rozmaitości niestabilnej**). *M- gładka rozmaitość, $f \in Diff^r(M), r \geq 1$, $p \in M$ punkt stały hiperboliczny, $E^u \subset T_p(M)$ podprzestrzeń odpowiadająca wartosciom własnym o module > 1. Wówczas istnieje otoczenie $U \subset M$ punktu p takie, że*

$$W^u_{loc}(p) = \{x \in M : \forall n \geq 0, \quad f^{-n}(x) \in U\}$$

jest podrozmaitością klasy C^r w topologii indukowanej z M i $T_p(W^u_{loc}) = E^u$.

Uwaga 6.5. *Analogiczne twierdzenia o lokalnych rozmaitościach stabilnych i niestabilnych zachodzą dla pól wektorowych i potoków generowanych przez nie w otoczeniu hiperbolicznych punktów krytycznych.*

W podanych poniżej przykładach mamy trzy punkty krytyczne hiperboliczne pola wektorowego zdefiniowanego w na $\mathbb{R}^2$ w otoczeniu punktu krytycznego p.

a) siodło - lokalne rozmaitości $W^s_{loc}(p)$ i $W^u_{loc}(p)$ są jednowymiarowe

b) ściek - lokalna rozmaitość $W^s_{loc}(p)$ jest pełnym otoczeniem, $W^u_{loc}(p)$ redukuje się do punktu p.

c) źródło - lokalna rozmaitość $W^u_{loc}(p)$ jest pełnym otoczeniem, $W^s_{loc}(p)$ redukuje się do punktu p.

a) pole wektorowe o stałych współcz. b) autonomiczne pole o niestałych współ.

6.2 Globalne rozmaitości stabilne i niestabilne

Twierdzenie 6.6 (Smale'a o globalnej rozmaitości stabilnej). *$M \subset I\!R^n$ gładka rozmaitość różniczkowa, dim M=m, $X : M \to M$ pole wektorowe klasy C^r, $r \geq 1$, ϕ_t potok generowany przez pole X, $x_0 \in M$ hiperboliczny punkt krytyczny. Wówczas istnieje różnowartościowa immersja $\psi : R^k \to M$ taka, że*

- $\psi(0) = x_0$
- $\psi(R^k) = W^s(x_0) = \{x \in M : \lim_{t\to\infty} \phi_t(x_0) = x_0\}$
- $T_{x_0}(\psi(R^k))) = E^s \subset T_{x_0}(M)$ *jest podprzestrzenia własną operatora $DX(x_0)$ odpowiadającą wartościom własnym μ takim, że $\mu < 0$, gdzie $k = dimE^s$*

Twierdzenie 6.7 (Smale'a o globalnej rozmaitości niestabilnej). *$M \subset I\!R^n$ gładka rozmaitość różniczkowa, dim M=m, $X : M \to M$ pole wektorowe klasy C^r, $r \geq 1$, ϕ_t potok generowany przez pole X, $x_0 \in M$ hiperboliczny punkt krytyczny. Wówczas istnieje różnowartościowa immersja $\psi : R^k \to M$ taka, że*

- $\psi(0) = x_0$
- $\psi(R^k) = W^s(x_0) = \{x \in M : \lim_{t\to\infty} \phi_t(x_0) = x_0\}$
- $T_{x_0}(\psi(R^{m-k}))) = E^u \subset T_{x_0}(M)$ *jest podprzestrzenia własną operatora* $DX(x_0)$ *odpowiadającą wartościom własnym* μ *takim, że* $\mu > 0$ *, gdzie* $m - k = dimE^u$

Przykład Rozpatrujemy algebraiczny automorfizm torusa T^2 zadany macierzą

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zero jest punktem stałym hiperbolicznym siodłowym o wartościach własnych $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$,. Odpowiadają im wektory własne $w_1 = [1, \frac{\sqrt{5}-1}{2}]$ i $w_2 = [1, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}]$. Proste wyznaczone przez te wektory są odpowiednio globalną rozmaitością stabilną i niestabilną dyfeomoefizmu A jako odwzorowania z $I\!R^2 \to I\!R^2$. Ich rzuty na torus stanowią globalne rozmaitości punktu stałego na torusie.

Przykład Mamy pole wektorowe na torusie, które ma 4 punkty krytyczne p_1- źródlo, p_2, p_3-siodła, p_4-ściek

$W^u(p_1) = T^2 \setminus \{p_2, p_3, p_4\}$, $W^s(p_4) = T^2 \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$ $W^u(p_2) = W^s(p_3)$

7 Własności typowe w przestrzeni $\mathrm{Diff}^{\mathrm{r}}(\mathrm{M})$ i $\mathrm{C}^{\mathrm{r}}(\mathrm{TM})$

Definicja 7.1. *Niech M* **zwarta** *gładka rozmaitość różniczkowa, dim M=m, $Diff^r(M)$ - przestrzeń dyfeomorfizmów klasy $C^r, r \geq 1$.* **Topologię (zbieżność klasy C^r)** *w przestrzeni $Diff^r(M)$ określamy następująco: jesli $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n, f_0 \in Diff^r(M)$ to $f_n \to f_0$ gdy $D^k f_n$ zbiega jednostajnie do $D^k f_0$ na M dla $1 \leq k \leq r$. Jeśli M jest rozmaitością Riemanna, to metrykę w $Diff^r(M)$ można zdefiniować następująco:*

$$d(f,g) = \max_{-r\leq k\leq r} \sup_{x\in M} ||D^k f(x) - D^k f(y)||.$$

Wtedy przestrzeń $Diff^r(M)$ z metryką d jest przestrzenią metryczną zupełną.

Definicja 7.2. *Niech M* **zwarta** *gładka rozmaitość różniczkowa, dim M=m, $C^r(TM)$ przestrzeń pól wektorowych klasy $C^r, r \geq 1$. Niech $\{(U_k, \phi_k)\}_1^n$ będzie skończonym atlasem na rozmaitości M. Niech $X \in C^r(TM)$. Oznaczmy przez $\tilde{X}_k$ pole X w mapie ϕ_k. Jeśli M jest rozmaitością Riemanna, to normę w $C^r(M)$ można zdefiniować następująco:*

$$||X|| = \max_{0\leq k\leq n} \sup_{\tilde{x}\in\phi_k(U_k)} \left(\sum_{i=0}^{r} ||D^i \tilde{X}_k(\tilde{x})|| \right).$$

Wtedy przestrzeń $C^r(TM)$ z norną $||\ ||$ jest przestrzenią Banacha.

Faktycznie wszystkie rozmaitości, które badamy (np. sfery, torusy itd) są rozmaitościami riemanowskimi.

Definicja 7.3. *Podzbiór $\mathcal{A}$ przestrzeni topologicznej X nazywamy II kategorii Baire'a jeśli*

$$\mathcal{A} = \bigcap_{i\in I} U_i,$$

gdzie U_i jest otwartym i gęstym podzbiorem X, zaś I jest zbiorem przeliczalnym.

Definicja 7.4. *Powiemy, że własność G jest* ***typowa*** *w przestrzeni $Diff^r(M)$ ($C^r(TM)$), jeśli istnieje podzbiór $\mathcal{A} \subset Diff^r(M)$ ($C^r(TM)$) drugiej kategorii Baire'a, którego elementy spełniają własność G.*

Twierdzenie 7.5. *M* **zwarta** *gładka rozmaitość różniczkowa riemanowska, dim M=m, $Diff^r(M)$ -przestrzeń dyfeomorfizmów klasy $C^r, r \geq 1$ z metryką d. Wtedy G_1 zbiór dyfeomorfizmow których wszystkie punkty stałe są hiperboliczne tworzy zbiór II kategorii Baire'a. Ponieważ przestrzeń $Diff^r(M)$ z metryką d jest zupełna to G_1 jest gęstym podzbiorem $Diff^r(M)$.*

Twierdzenie 7.6. *M* **zwarta** *gładka rozmaitość różniczkowa riemanowska, dim M=m, $Diff^r(M)$ -przestrzeń dyfeomorfizmów klasy $C^r, r \geq 1$ z metryką d. Wtedy G_2 (zachodzi $G_2 \subset G_1$) zbiór dyfeomorfizmow których wszystkie punkty okresowe są hiperboliczne tworzy zbiór II kategorii Baire'a. Ponieważ przestrzeń $Diff^r(M)$ z metryką d jest zupełna to G_2 jest gęstym podzbiorem $Diff^r(M)$.*

Twierdzenie 7.7. *M* **zwarta** *gładka rozmaitość różniczkowa riemanowska, dim M=m, $C^r(TM)$ -przestrzeń pól wektorowych klasy $C^r, r \geq 1$ z normą $|| \; ||$. Wtedy G_1 zbiór pól wektorowych, których wszystkie punkty krytyczne są hiperboliczne tworzy zbiór II kategorii Baire'a. Ponieważ przestrzeń $C^r(TM)$ z normą $|| \; ||$ jest zupełna to G_1 jest gęstym podzbiorem $C^r(TM)$.*

7.1 Lokalna strukturalna stabilność punktów hiperbolicznych

Twierdzenie 7.8. *Niech M gładka rozmaitość różniczkowa riemanowska, dim M=m, $Diff^r(M)$ -przestrzeń dyfeomorfizmów klasy $C^r, r \geq 1$ z metryką d, p- hiperbolicznym punkt stały dyfeomorfizmu $f \in Diff^r(M)$. Wtedy f jest* ***lokalnie strukturalnie stabilne w otoczeniu punktu*** *p tzn.*

- *istnieje otoczenie V dyfeomorfizmu f w przestrzeni $Diff^r(M)$*
- *istnieje otoczenie U punktu $p = p_f$ w M takie, że dla każdego $g \in V$ istnieje dokladnie jeden punkt stały hiperboliczny p_g dyfeomorfizmu g należący do U*
- *przekształcenia f i g są topologicznie sprzężone w otoczeniach punktów p_f i p_g czyli istnieje homeomorfizm $h_g : U \to h_g(U)$ taki, że nastepujący diagram komutuje:*

$$\begin{array}{ccc} p_f \in U & \xrightarrow{f} & f(U) \\ \Big\downarrow h_g & & \Big\downarrow h_g \\ p_g \in h_g(U) & \xrightarrow{g} & g(h_g(U)) = h_g(f(U)) \end{array}$$

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla hiperbolicznych punktów okresowych.

Twierdzenie 7.9. *Niech M gładka rozmaitość różniczkowa riemanowska, dim M=m, $C^r(TM)$ -przestrzeń pól wektorowych klasy $C^r, r \geq 1$ z metryką d, x_0- hiperbolicznym punkt krytyczny pola $X \in C^r(TM)$, ϕ_t - potok pola wektorowego X. Wtedy pole X jest* ***lokalnie strukturalnie stabilne w otoczeniu punktu*** *x_0 tzn.*

- *istnieje otoczenie V pola wektorowego X w $C^r(TM)$*
- *istnieje otoczenie U punktu $x_0 = x_0(X)$ w M takie, że dla każdego $Y \in V$ istnieje dokladnie jeden krytyczny punkt hiperboliczny $x_0(Y)$ pola wektorowego Y należący do U*
- *potoki ϕ_t pola X i ψ_t pola Y są topologicznie sprzężone w otoczeniu punktów krytycznych $x_0(X)$ i $x_0(Y)$ czyli istnieje homeomorfizm $h_Y : U \to h_Y(U)$ taki, że nastepujący diagram komutuje:*

$$\begin{array}{ccc} x_0 \in U & \xrightarrow{\phi_t} & \phi_t(U) \\ \Big\downarrow h_Y & & \Big\downarrow h_Y \\ x_0(Y) \in h_Y(U) & \xrightarrow{\psi_t} & \psi_t(h_Y(U)) \end{array}$$

8 Zachowanie się potoku w otoczeniu orbity zamkniętej

Niech M gładka rozmaitość różniczkowa, dim M=m, X pole wektorowe klasy $C^r, r \geq 1$, ϕ_t-potok generowany przez pole X. Niech $\gamma(T)$ oznacza zamkniętą orbitę okresową pola X o okresie podstawowym $T > 0$ przechodząca przez punkt x_0. Wtedy $\phi_T(x_0) = x_0$ oraz

$$D_{x_0}\phi_T : T_{x_0}M \to T_{x_0}M$$

Ponieważ

$$\vec{X}(x_0) = \frac{d}{dt}_{|t=0}(\phi_t(x)),$$

to wektor styczny do orbity zamkniętej $\gamma(T)$ punkcie x_0 wynosi

$$\frac{d}{dt}_{|t=T}(\phi_t(x)) = \frac{d}{dt}_{|t=0}(\phi_t(x)) = \vec{X}(x_0),$$

czyli **1 jest wartością własną** różniczki

$$D_{x_0}\phi_T : T_{x_0}M \to T_{x_0}M$$

(bo wektor $\vec{X}(x_0)$ jest wektorem własnym $D_{x_0}\phi_T$.)

8.1 Przekształcenie Poincarégo

Definicja 8.1. Lokalnym cięciem transwersalnym *trajektorii* γ *w punkcie* x_0 *nazywamy podrozmaitość* S *wymiaru* $m-1$ *taką, że* $x_0 \in S$ *oraz*

$$T_{x_0}M = T_{x_0}S \oplus \{\vec{X}(x_0)\},$$

gdzie $\{\vec{X}(x_0)\}$ *oznacza jednowymiarową podprzestrzeń generowaną przez wektor* $\vec{X}(x_0)$.

Definicja 8.2. *Niech* S *będzie lokalnym cięciem transwersalnym orbity zamkniętej* $\gamma(T)$ *w punkcie* x_0. *Dla dostatecznie małego otoczenia* $U \subset S$ *punktu* x_0 *definujemy przekształcenie* $\mathcal{P} : U \to S$

$$\mathcal{P}(x) = \phi(t(x), x),$$

gdzie $t(x)$ *jest najmniejszą liczbą dodatnią taką, że* $\phi(t(x), x) \in S$. *Odwzorowanie* $\mathcal{P}$ *nazywamy* ***przekształceniem Poincarégo***.

Twierdzenie 8.3. *Dla każdego cięcia transwersalnego* S *orbity zamkniętej* $\gamma(T)$ *w punkcie* $x_0 \in \gamma$, *przekształcenie* $\mathcal{P}$ *jest dobrze określone dla dostatecznie małych otoczeń* U *punktu* x_0 *w* S.

Dowód Twierdzenie ma charakter lokalny. Można założyć, że S mieści się w jednej mapie. Wybierając odpowiedni układ współrzędnych możemy S zapisac jako

$$S = \{x = (x_1, \ldots, x_m) :\in I\!R^m : x_m = 0\},$$

$x_0 = (0,\ldots,0)$, $\vec{X}(0) = [0,\ldots,1]$. Niech $\phi(t,x) = (\phi_1(t,x),\ldots,\phi_m(t,x))$. Wówczas $\phi(t,x) \in S$ wtedy i tylko wtedy gdy $\phi_m(t,x) = 0$. Ponieważ $\phi(T,0) = 0$ oraz $\frac{d\phi_m}{dt}(T,0) = 1$, więc na mocy twierdzenia o funkcjach uwikłanych istnieją: otoczenie U punktu 0, przedział $(T-\epsilon, T+\epsilon)$ i funkcja $t(x)$ klasy C^r takie, że $\phi_m(t(x),0) = 0$ i $t(x) \in (T-\epsilon, T+\epsilon)$. Liczba $t(x)$ jest czasem najmniejszego powrotu punktu x do S (gdyż T jest okresem podstawowym). Stąd $\mathcal{P}(x) = (\phi(t(x),x)$ dla $x \in U$ jest dobrze określoną funkcją klasy C^r. Faktycznie $\mathcal{P}$ jest dyfeomorfizmem. □

Twierdzenie 8.4. *Niech $\gamma(T)$ będzie zamkniętą orbitą okresową. Jeśli S_1 i S_2 są dwoma cięciami transwersalnymi w punktach $x_1, x_2 \in \gamma(T)$ a $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ oznaczają odpowiednio dwa przekształcenia Poincarégo, to $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ są dyfemorficznie sprzężone, tzn. istnieje taki dyfeomorfizm $h : V_1 \to V_2$, gdzie V_1, V_2 są odpowiednio otoczeniami punktów x_1 i x_2 w S_1 i S_2, że $\mathcal{P}_1 \circ h = h \circ \mathcal{P}_2$.*

Uwaga 8.5. *Dla każdego przekształcenia Poincarégo $\mathcal{P}$ orbity zamkniętej $\gamma(T)$ w punkcie x_0 zachodzi, że*

$$spektrum(D_{x_0}\mathcal{P}) \cup \{1\} = spektrum(D_{x_0}(\phi_T))$$

gdzie T jest okresem podstawowym orbity $\gamma(T)$.

Przykład 1
Niech $M = I\!R^2$, pole wektorowe $X(x,y) = [-y, x]$. Trajektorie są koncentrycznymi okręgami. Przekształcenie Poincarégo jest identycznością dla każdej orbity zamkniętej.

8.2 Hiperboliczne orbity zamknięte

Definicja 8.6. *Orbitę zamkniętą $\gamma(T)$ pola $X \in C^r(TM)$ przechodzącą przez punkt x_0, o okresie podstawowym T nazywamy transwersalną jeśli spektrum operatora $D_{x_0}\phi_T$ jeśli 1 jest jednokrotną wartością własną.*

Definicja 8.7. *Orbitę zamkniętą $\gamma(T)$ pola $X \in C^r(TM)$ przechodzącą przez punkt x_0, o okresie podstawowym T nazywamy hiperboliczną, jeśli $\gamma(T)$ jest transwersalna i $D_{x_0}\phi_T$ nie ma innych wartości własnych o module 1 różnych od 1.*

Wniosek 8.8. *Orbita zamkniętą $\gamma(T)$ jest hiperboliczna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego przekształcenia Poincarégo $\mathcal{P}$ w punkcie $x_0 \in \gamma(T)$ punkt x_0 jest hiperbolicznym punktem stałym przekształcenia $\mathcal{P}$.*

Definicja 8.9. *Klasyfikacja hiperbolicznych orbit zamkniętych Niech $\gamma(T)$ będzie hiperboliczną orbitą zamkniętą przechodzącą przez punkt x_0 o okresie podstawowym T powiemy, że*

- *$\gamma(T)$ jest orbitą* ***siodłową*** *jeśli x_0 jest punktem stałym hiperbolicznym siodłowym dyfeomorfizmu Poincarégo $\mathcal{P}$*
- *$\gamma(T)$ jest orbitą* ***stabilną*** *jeśli x_0 jest punktem stałym hiperbolicznym przyciągającym (ściekiem) dyfeomorfizmu Poincarégo $\mathcal{P}$*
- *$\gamma(T)$ jest orbitą* ***niestabilną*** *jeśli x_0 jest punktem stałym hiperbolicznym odpychającym (źródłem) dyfeomorfizmu Poincarégo $\mathcal{P}$*

Definicja 8.10. *Niech $\gamma(T)$ będzie hiperboliczną orbitą zamkniętą przechodzącą przez punkt x_0 o okresie podstawowym T. Ponieważ x_0 jest stałym punktem hiperbolicznym, to z twierdzenia Hadamarda-Perona wynika, że istnieją lokalne rozmaitości stabilna $W^s_{loc}(x_0)$ i niestabilne $W^u_{loc}(x_0)$ punktu x_0 dla $\mathcal{P}$. Niech*

$$W^s(\gamma) = \bigcup_{t \in I\!R} \phi_t(W^s_{loc}(x_0))$$

$$W^u(\gamma) = \bigcup_{t \in I\!R} \phi_t(W^u_{loc}(x_0))$$

Zbiory $W^s(\gamma)$ i $W^u(\gamma)$ nazywamy odpowiednio rozmaitościami stabilnymi i niestabilnymi orbity zamkniętej γ.

Uwaga 8.11. *Topologicznie podrozmaitości $W^s(\gamma)$ i $W^u(\gamma)$ sa immersyjnym włożeniem walca $S^1 \times I\!R^k$ lub uogólnionej wstęgi Möbiusa w M*

łatwo zauważyć, że

$$dim W^s(\gamma) = dim W^s_{loc}(\gamma) + 1, \quad dim W^u(\gamma) = dim W^u_{loc}(\gamma) + 1$$

oraz

$$dim W^s(\gamma) + dim W^u(\gamma) = dim M + 1$$

Przykład 1 Orbity hiperboliczne w $I\!R^2$

Przykład 2 Orbity hiperboliczne w $I\!R^3$

Twierdzenie 8.12. *M **zwarta** gładka rozmaitość różniczkowa riemanowska, dim M=m, $C^r(TM)$ -przestrzeń pól wektorowych klasy $C^r, r \geq 1$ z normą $||\ ||$. Wtedy G_2- zbiór pól wektorowych, których wszystkie punkty krytyczne i zamknięte orbity okresowe są hiperboliczne tworzy zbiór II kategorii Baire'a. Ponieważ przestrzeń $C^r(TM)$ z normą $||\ ||$ jest zupełna to G_2 jest gęstym podzbiorem $C^r(TM)$.*

8.3 Lokalna strukturalna stabilność hiperbolicznych orbit zamkniętych

Twierdzenie 8.13. *Niech M gładka rozmaitość różniczkowa riemanowska, dim M=m, $C^r(TM)$ -przestrzeń pól wektorowych klasy $C^r, r \geq 1$ z metryką d, $\gamma(T)$- hiperboliczna orbita zamknięta pola $X \in C2(TM)$ przechodząca przez punkt x_0, ϕ_t - potok pola wektorowego X. Wtedy pole X jest **lokalnie strukturalnie stabilne w otoczeniu orbity** $\gamma(T)$ tzn.*

- *istnieje otoczenie V pola wektorowego X*

- *istnieje otoczenie U orbity $\gamma(T) = \gamma_X(T)$ w M takie, że dla każdego $Y \in V$ istnieje dokladnie jedna hiperboliczna orbita zamknięta $\gamma_Y(T)$ pola wektorowego Y należący do U*
- *potoki ϕ_t pola X i ψ_t pola Y są topologicznie sprzężone w otoczeniu orbit zamkniętych $\gamma_X(T)$ i $\gamma_Y(T)$ czyli istnieje homeomorfizm $h_Y : U \to h_Y(U)$ taki, że nastepujący diagram komutuje:*

$$\begin{array}{ccc} \gamma_X(T) \in U & \xrightarrow{\phi_t} & \phi_t(U) \\ \Big\downarrow h_Y & & \Big\downarrow h_Y \\ \gamma_Y(T) \in h_Y(U) & \xrightarrow{\psi_t} & \psi_t(h_Y(U)) \end{array}$$

8.4 Zbiory graniczne

Definicja 8.14. *Niech M gładka rozmaitość różniczkowa, $f \in Diff^r(M)$, $x_0 \in M$. Zbiory*

$$\omega(x_0) := \{x \in M : \exists k_n \in I\!N, k_n \to +\infty \text{ } t.\dot{z}e \lim_{n\to+\infty} f^{k_n}(x) = x_0\}$$

$$\alpha(x_0) := \{x \in M : \exists k_n \in I\!N, k_n \to -\infty \text{ } t.\dot{z}e \lim_{n\to-\infty} f^{k_n}(x) = x_0\}$$

nazywamy zbiorami granicznymi punktu x_0.

Definicja 8.15. *Niech M gładka rozmaitość różniczkowa, $X \in C^r(TM)$, $x_0 \in M$. Zbiory*

$$\omega(x_0) := \{x \in M : \exists t_n \in I\!R, t_n \to +\infty \text{ } t.\dot{z}e \lim_{n\to+\infty} \phi_{t_n}(x) = x_0\}$$

$$\alpha(x_0) := \{x \in M : \exists t_n \in I\!N, k_n \to -\infty \text{ } t.\dot{z}e \lim_{n\to-\infty} \phi_{t_n}(x) = x_0\}$$

nazywamy zbiorami granicznymi punktu x_0.

Twierdzenie 8.16. *Niech M **zwarta** gładka rozmaitość różniczkowa, $X \in C^r(TM)$. Wówczas dla każdego punktu $x_0 \in M$ zbiory $\omega(x_0)$ i $\alpha(x_0)$ są niepuste, domknięte i spójne. W przypadku dyfeomorfizmu $f \in Diff^r(M)$ zbiory $\omega(x_0)$ i $\alpha(x_0)$ są tylko niepuste i domknięte.*

Definicja 8.17. *Orbitę zamkniętą* $\gamma(T)$ *nazywamy cyklem granicznym jeśli istnieje otoczeniie* U *orbity* $\gamma(T)$ *takie, że dla każdego* $x \in U$ *zachodzi* $\omega(x) = \gamma(T)$ *lub dla każdego* $x \in U$ *zachodzi* $\alpha(x) = \gamma(T)$.

Uwaga 8.18. *Każda hiperboliczna orbita zamknięta stabilna lub niestabilna jest cyklem granicznym.*

Przykłady zbiorów granicznych

1. p_1-punkt krytyczny hiperboliczny -*źródlo*,
   p_2-punkt krytyczny hiperboliczny -*siodło*,
   p_3-punkt krytyczny hiperboliczne -*ściek*,
   $W^u(p_2) = W^s(p_2) = \{\phi_t(-a, 0) : t \in \mathbb{R}\} \cup \{\phi_t(a, 0) : t \in \mathbb{R}\}$
   Dla każdego $(x, y) \in D_1 \setminus \{p_1\}$ zachodzi, że
   $$\alpha(x, y) = \{p_1\}$$
   oraz
   $$\omega(x, y) = \{\phi_t(-a, 0) : t \in \mathbb{R}\} \cup \{p_2\}$$
   Analogicznie dla każdego $(x, y) \in D_2 \setminus \{p_3\}$ zachodzi, że
   $$\omega(x, y) = \{p_3\}$$
   oraz
   $$\alpha(x, y) = \{\phi_t(a, 0) : t \in \mathbb{R}\} \cup \{p_2\}$$
2. Niech $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
   $$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0$$

Dla $\lambda > 1$ zero jest punktem stałym hiperpolicznym (źródło). Korzystając z rzutu stereograficznego

otrzymamy dyfeomorfizm $F = \pi^{-1} \circ A \circ \pi : S^2 \setminus \{N\} \to S^2 \setminus \{N\}$. Dookreślamy kładąc $F(N) = N$. Zatem dla F biegun południowy S jest punktem stałym odpychającym, zaś N punktem stałym przyciągającym. Dla każdego $x \in S^2 \setminus \{N\}$ mamy, że $\alpha(x) = \{S\}$, zaś $x \in S^2 \setminus \{S\}$ mamy, że $\omega(x) = \{N\}$.

3. Na $\mathbb{R}^2$ mamy zdefiniowane równanie $x'' = -x$, które jest równoważne układowi równań postaci
$$\begin{cases} x' & = & -y \\ y' & = & x \end{cases}$$
Jego rozwiązaniami jest rodzina koncentrycznych okręgów na $\mathbb{R}^2$. Korzystając z rzutu stereograficznego możemy zdefiniować pole wektorowe na S^2, którego potok ma same orbity okresowe.

9 Punkty niebłądzące

Definicja 9.1. *Niech M gładka rozmaitość różniczkowa, $Diff^r(M)$ -przestrzeń dyfeomorfizmów klasy $C^r, r \geq 1$, $x \in M$. Punkt x nazywamy* ***błądzącym*** *jeśli istnieje otoczenie U*

punktu x takie, że $\forall n \in \mathbb{Z}$, $|n| > 0$ zachodzi, że $f^n(U) \cap U = \emptyset$.

Definicja 9.2. *Niech M gładka rozmaitość różniczkowa, $Diff^r(M)$ -przestrzeń dyfeomorfizmów klasy $C^r, r \geq 1$, $x \in M$. Punkt x nazywamy **niebłądzącym** jeśli nie jest błądzący.*

Uwaga 9.3. *Sens tego pojęcia polega na tym, że dla każdego U-otoczenia punktu niebłądzącego x istnieje ciąg $|n_k| \to \infty$ taki, że $f^{n_k}(U) \cap U \neq \emptyset$.*

Definicja 9.4. *Niech M gładka rozmaitość różniczkowa, $C^r(TM)$ -przestrzeń pól wektorowych klasy $C^r, r \geq 1$, $x \in M$. Punkt x nazywamy **błądzącym** jeśli istnieje otoczenie U punktu x takie, że $\forall t \in \mathbb{R}$, $|t| > t_0 > 0$ zachodzi, że $\phi_t(U) \cap U = \emptyset$.*

Definicja 9.5. *Niech M gładka rozmaitość różniczkowa, $C^r(TM)$ -przestrzeń pól wektorowych klasy $C^r, r \geq 1$, $x \in M$. Punkt x nazywamy **niebłądzącym** jeśli nie jest błądzący.*

Uwaga 9.6. *Sens tego pojęcia polega na tym, że dla każdego U-otoczenia punktu niebłądzącego x istnieje ciąg $|t_k| \to \infty$ taki, że $\phi_{t_k}(U) \cap U \neq \emptyset$.*

Definicja 9.7. *Dla danego dyfeomorfizmu f (dla danego pola wektorowego X) **zbiór punktów niebłądzących** oznaczamy symbolem $\Omega(f)$ (odp. $\Omega(X)$.)*

Przykłady

- Punkty stałe i okresowe hiperboliczne dyfeomorfizmu są podzbiorami $\Omega(f)$.
- Punkty krytyczne hiperboliczne pola wektorowego X są podzbiorami $\Omega(X)$.
- Orbity okreseowe (niekoniecznie hiperboliczne) pola wektorowego X są podzbiorami $\Omega(X)$.

- Suma trajektorii $\gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_4 \cup \{p_1, \ldots p_4\}$ (patrz rysunek poniżej) należy do $\Omega(X)$.

Lemat 9.8. *Bezpośrednio z definicji wynika, że:*

1. *Zbiór punktów błądzacych jest otwarty, zatem $\Omega(f)$ jest domknięty.*
2. *$\Omega(f)$ jest niezmienniczy.*

Podamy przykład pola wektorowego na $I\!R^2$ dla pokazujący, że istnieją punkty należące do $\Omega(X)$, które nie są zbiorem α- lub ω- granicznym trajektorii.

Punkty p_1, p_2 to punkty siodłowe, $\gamma_n, n \in N$, orbity okresowe hiperboliczne, naprzemian stabilne i niestabilne. Trajektorie rozmaitości stabilne i niestabile siodeł p_1, p_2 są punktami niebłądzącymi ale nie są zbiorami granicznymi dla innych trajektorii.

Lemat 9.9. (lemat o zamykaniu- C.Pugh *Niech M gładka* **zwarta** *rozmaitość różniczkowa, $C^1(TM)$ -przestrzeń pól wektorowych klasy C^1, $x_0 \in \Omega(X)$. Wtedy dla każdego otoczenia V pola X w $C^1(TM)$ istnieje pole $Y \in V$ takie, że Y posiada orbitę okresową γ przechodzącą przez x_0.*

Uwaga 9.10. *Pozostaje nadal problemem otwartym czy lemat o zamykaniu zachodzi dla pól wektorych wyższej klasy tzn. dla $r \geq 2$.*

10 Pola wektorowe i dyfeomorfizmy Morse'a-Smale'a

Definicja 10.1. *Elementami krytycznymi pola wektorowego X lub dyfeomorfizmu f nazywamy:*

- *dla f punkty stałe i punkty okresowe*
- *dla X punkty krytyczne i orbity okresowe.*

Definicja 10.2. *Niech σ_1, σ_2 bedą elementami krytycznymi pola wektorowego X lub dyfeomorfizmu f. Rozmaitości $W^u(\sigma_1)$ i $W^s(\sigma_2)$ przecinają się transwersalnie w punkcie $x \in W^u(\sigma_1) \cap W^s(\sigma_2)$ jeśli*

$$T_x(W^u(\sigma_1)) \cup T_x(W^s(\sigma_2)) = T_x(M).$$

(ta suma nie musi być prosta)

Ozn. $W^u(\sigma_1) \quad W^s(\sigma_2)$.

Przykłady

1. Pole wektorowe na $\mathbb{R}^2$ z dwoma siodłami p_1 i p_2, ich rozmaitości stabilne i niestabilne mają wspólną trajektorię.

$dimW^u(p_1) = dimW^s(p_2) = 1$. Dla $x \in W^u(p_1) \cap W^s(p_2)$

$$T_x(W^u(\sigma_1)) \cup T_x(W^s(\sigma_2)) \neq T_x(M).$$

czyli $W^u(p_1)$ i $W^s(p_2)$ nie przecinają się transwersalnie w punkcie x.

2. Pole wektorowe na S^2 z dwoma punktami krytycznymi: N-źródło i S-ściek. Dla $x \in S^2 \setminus \{N, S\}$ zachodzi, że $x \in W^u(N) \cap W^s(S)$ oraz

$$T_x(W^u(\sigma_1)) = T_x(W^s(\sigma_2)) = T_x(M).$$

zatem rozmaitości $W^u(N)$ i $W^s(S)$ przecinają się transwersalnie w x.

3. Dyfeomorfzm płaszczyzny z czterema siodłami p_1, p_2, p_3, p_4.

Rozmaitość stabilna p_1 i niestabilna p_2 nie przecinają się transwersalnie

Rozmaitość stabilna p_3 i niestabilna p_4 przecinają się transwersalnie.

Definicja 10.3. *Niech M gładka rozmaitość różniczkowa, $Diff^r(M)$ -przestrzeń dyfeomorfizmów klasy $C^r, r \geq 1$. Dyfeomorfizm $f \in Diff^r(M)$ nazywamy Morse'a-Smale'a jeżeli f spełnia następujące warunki:*

- *$\Omega(f)$ jest sumą skończonej ilości elementów krytycznych (są to punkty stałe i okresowe)*
- *każdy element krytyczny jest hiperboliczny.*
- *rozmaitości stabilne i niestabilne elementów krytycznych przecinają się transwersalnie.*

Definicja dla pól wektorowych jest analogiczna.

Przykłady pól wektorowych Morse'a-Smale'a

1. Pole wektorowe na S^2, p_1, p_2 ścieki, r_1, r_2- źródła, s_1, s_2- siodła

   $\Omega(X) = \{p_1, p_2, r_1, r_2, s_1, s_2\}$

2. Pole wektorowe na S^2, p_1, p_2-źródła, $\gamma(T)$-orbita okresowa stabilna.

   $\Omega(X) = \{p_1, p_2, \gamma(T)\}$.

3. Pole wektorowe na S^2, N, S, w, r-źródła, γ_1, γ_2-orbity okresowe stabilne

   $\Omega(X) = \{N, S, w, r, \gamma_1, \gamma_2\}$

4. Pole wektorowe na torusie T^2, γ_1-orbita okresowa niestabilna, γ_2-orbita okresowe stabilna

   $\Omega(X) = \{\gamma_1, \gamma_2\}$

11 Strukturalna stabilność dyfeomorfizmów i pól wektorowych I

Definicja 11.1. *M* **zwarta** *gładka rozmaitość różniczkowa, dim M=m, Diff$^r(M)$ -przestrzeń dyfeomorfizmów klasy $C^r, r \geq 1$. Dyfeomorfizm $f \in$ Diff$^r(M)$ nazywamy* ***strukturalnie stabilnym*** *jeżeli istnieje U otoczenie f w Diff$^r(M)$ takie, że dla każdego $g \in U$ istnieje homeorfizm h_g który sprzęga f i g tzn. następujący diagram komutuje.*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow h_g & & \downarrow h_g \\ M & \xrightarrow{g} & M \end{array}$$

czyli

$$h_g \circ f = h_g \circ g.$$

Definicja dla pól wektorowych jest analogiczna.

11.1 Warunki konieczne do strukturalnej stabilności

Poznaliśmy następujące własności typowe w przestrzeniach $\mathrm{Dif}f^r(M)$ i $C^r(TM), r \geq 1$.

- G_1 klasa dyfeomorfizmów (lub pól wektorowych) których wszystkie punkty stałe są hiperboliczne (punkty krytyczne są hiperboliczne)

- $G_2 \subset G_1$ klasa dyfoemorfizmów (lub pól wektorowych) których wszystkie punkty stałe i okresowe są hiperboliczne (punkty krytyczne i orbity okresowe są hiperboliczne)

Definicja 11.2. *M* **zwarta** *gładka rozmaitość różniczkowa riemanowska, dim M=m, $Diff^r(M)$ -przestrzeń dyfeomorfizmów klasy $C^r, r \geq 1$. Dyfeomorfizm $f \in Diff^r(M)$ nazywamy* ***Kupki- Smale'a****, jeżeli f spełnia następujące warunki*

- *elementy krytyczne są hiperboliczne*
- *rozmaitości stabilne i niestabilne elementów krytycznych przecinają się transwersalnie.*

Definicja dla pól wektorowych jest analogiczna.

Definicja 11.3. *Przez $G_3 \subset G_2 \subset G_1$ oznaczamy klasę dyfeomorfizmów (lub pól wektorowych) zwanych dyfeomorfizmami (polami wektorowymi)* ***Kupki- Smale'a****,*

Twierdzenie 11.4. (Ivan Kupka - Stephen Smale) *M* **zwarta** *gładka rozmaitość różniczkowa, dim M=m, $Diff^r(M)$ -przestrzeń dyfeomorfizmów klasy $C^r, r \geq 1$. Wtedy zbiór G_3- dyfeomorfizmów Kupki-Smale'a tworzy zbiór II kategorii Baire'a. Ponieważ przestrzeń $Diff^r(M)$ z metryką d jest zupełna to własnośc G_3 jest typowa $Diff^r(M)$.*

Twierdzenie 11.5. (Kupka -Smale) M **zwarta** *gładka rozmaitość różniczkowa, dim M=m, $C^r(TM)$ -przestrzeń pól wektorowych klasy $C^r, r \geq 1$. Wtedy zbiór G_3 - pól wektorowych Kupki-Smale'a tworzy zbiór II kategorii Baire'a. Ponieważ przestrzeń $C^r(TM)$ z normą $\| \, \|$ jest zupełna, to własnośc G_3 jest typowa $C^r(TM)$.*

Twierdzenie 11.6. *Własności G_1, G_2, G_3 są konieczne do strukturalnej stabilności dyfeomorfizmów i pól wektorowych.*

Twierdzenie 11.7. *Jeżeli pole wektorowe jest Morse'a-Smale'a to jest Kupki Smale'a.*

Uwaga 11.8. *Twierdzenie odwrotne nie zachodzi.*

Podamy przykład na płaszczyźnie.

To pole ma nieskończenie wiele orbit okresowych $\gamma_n, n \in \mathbb{N}$, które są naprzemian stabilne i niestabilne. Punkty p_1, p_2 są siodłami, r jest źródlem. $\{\phi_t(x_1) : t \in \mathbb{R}\} \cup \{\phi_t(x_2) : t \in \mathbb{R}\} \cup \{\phi_t(x_3) : t \in \mathbb{R}\} \cup \{\phi_t(x_4) : t \in \mathbb{R}\} \cup \{p_1\} \cup \{p_2\} \subset \Omega(X)$

11.2 Warunki dostateczne do strukturalnej stabilności

Twierdzenie 11.9. (J.Palis)

- M **zwarta** *gładka rozmaitość różniczkowa riemanowska, dim M=m, $C^r(TM)$ -przestrzeń pól wektorowych klasy $C^r, r \geq 1$. Jeżeli X jest polem Morse'a-Smale'a to jest strukturalnie stabilne.*

- M **zwarta** *gładka rozmaitość różniczkowa riemanowska, dim M=m, Diff*$^r(M)$ *-przestrzeń dyfeomorfizmów klasy* $C^r, r \geq 1$*. Jeżeli* f *jest dyfeomorfizmem Morse'a-Smale'a to jest strukturalnie stabilny.*

Twierdzenie 11.10. (Peixoto)

M **zwarta** *gładka rozmaitość różniczkowa riemanowska, dim* M *=m* ≤ 2*!!,* $C^r(TM)$ *-przestrzeń pól wektorowych klasy* $C^r, r \geq 1$*. Zbiór pól wektorowych Morse'a-Smale'a tworzy otwarty i gęsty podzbiór przestrzeni* $C^r(TM)$*.*

- M **zwarta** *gładka rozmaitość różniczkowa riemanowska, dim M=m* $= 1$*!!, Diff*$^r(M)$ *-przestrzeń dyfeomorfizmów klasy* $C^r, r \geq 1$*. Zbiór dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a tworzy otwarty i gęsty podzbiór przestrzeni Diff*$^r(M)$*.*

Uwaga 11.11. *Dla rozmaitości wymiaru* $m > 2$ *NIE ZACHODZI gęstość pól wektorowych Morse'a-Smale'a. Dyfeomorfizmy Morse'a-Smale'a NIE SĄ GĘSTE na rozmaitościach wymiaru* $m \geq 2$. **Na wykładzie podano błędnie, że dyfeomorfizmy Morse'a-Smale'a nie są gęste dla m** $>$ **2**.

12 Zbiory minimalne

Definicja 12.1. M *gładka rozmaitość różniczkowa riemanowska, dim M=m, Diff*$^r(M)$ *- przestrzeń dyfeomorfizmów klasy* $C^r, r \geq 1$, $f \in$ *Diff*$^r(M)$ *Zbiór* $S \subset M$ *nazywamy* ***minimalnym*** *jeśli jest*

a) domknięty

b) niepusty

c) niezmiennniczy tzn. $f(S) \subset S$

i żaden jego podzbiór właściwy nie ma tych własności.

Definicja 12.2. *Jeżeli* $S = M$ *to dyfeomorfizm* f *nazywamy mininalnym.*

Definicja 12.3. *M* **zwarta** *gładka rozmaitość różniczkowa riemanowska, dim $M = m$ $C^r(TM)$ -przestrzeń pól wektorowych klasy $C^r, r \geq 1$, $X \in C^r(TM)$, ϕ_t- potok generowany przez X. Zbiór $S \subset M$ nazywamy* ***minimalnym*** *jeśli jest*

a) domknięty

b) niepusty

c) niezmiennniczy tzn $\phi_t(S) \subset S$ dla $\forall t \in \mathbb{R}$

i żaden jego podzbiór właściwy nie ma tych własności.

Definicja 12.4. *Jeżeli $S = M$ to potok ϕ_t nazywamy mininalnym.*

Przykłady zbiorów minimalych

a) punkty stale i punkty okresowe dyfeomorfizmow

b) punkty krytyczne i orbity okresowe pól wektorowych

Są to przykłady trywialne.

Rozpatrzmy stałe pole wektorowe na $\mathbb{R}^2$ postaci $[1, \alpha], \alpha \in \mathbb{R} \setminus Q$. Po zrzutowane na torus otrzymamy pole wektorowe, którego wszystkie trajektorie są gęste w T^2. Jest to zatem pole minimalne.

Twierdzenie 12.5. *M* **zwarta** *gładka rozmaitość różniczkowa riemanowska, dim $M = m$ $C^r(TM)$ -przestrzeń pól wektorowych klasy $C^r, r \geq 1$ (analogicznie dla $Diff^r(M)$), $X \in C^r(TM)$. Wtedy potok ϕ_t generowany przez X ma co najmniej jeden zbiór minimalny.*

Dowód Bierzemy rodzinę pozbiorów domkniętych i niezmienniczych. Porządkujemy ją poprzez inkluzje. Otrzymamy jedna lub wiele rodzin dobrze uporządkowanych. Wtedy w każdej takiej rodzinie z lematu Zorna musi istnieć element pierwszy. Jest to zbiór minimalny. $\square$

Wniosek 12.6. *Wiemy, że zbiory α i ω graniczne są niezmiennicze i domknięte. Zatem każdy z nich musi zawierać podzbiór minimalny czyli zbiorów minimalnych szukamy wśród zbiorów granicznych.*

Twierdzenie 12.7. M **zwarta i spójna** *gładka rozmaitość różniczkowa riemanowska, dim M =m, $f \in Diff^r(M), r \geq 1$. Każdy zbiór minimalny f jest albo nigdziegęsty albo jest całą rozmaitością.*

Dowód Przypuśmy, że $intS \neq \emptyset$. Ponieważ $f \in \mathrm{Dif}f^r(M)$, to f jest homeomorfizmem. Dla homeomorfizmów zachodzi, że jeśli zbiór S jest niezmienniczy, to jego brzeg i wnętrze są niezmiennicze. Stąd $\partial S = S \setminus intS$ jest domknięty, niezmienniczy i zawarty w S czyli $\partial S = \emptyset$, bo w przeciwnym przypadku dostalibyśmy sprzecznosc z minimalnością S. Zatem S jest domknięty i otwarty jednocześnie. Ponieważ M jest spójna, to jedynymi jej podzbiorami spójnymi mogą być tylko zbiór pusty lub M. □

Twierdzenie 12.8. (Kneser) M **zwarta i spójna dwuwymiarowa** *rozmaitość różniczkowa riemanowska, $X \in Diff^r(M), r \geq 1$, ϕ_t -potok generowany przez X. Jeżeli potok jest minimalny to $M = T^2$.*

Znane nam dwuwymiarowe rozmaitości zwarte, spójne i orientowalne to: sfera, torus i *precelki*. Torus z wyciecym dyskiem nazywany jest rączką. Sklejenie n- rączek daje rozmaitość zwaną preclem rodzaju n.

13 Zbiory hiperboliczne

Definicja 13.1. *M gładka rozmaitość różniczkowa riemanowska, dim M =m, $f \in Diff^r(M)$, $r \geq 1$. Zbiór $\Lambda \subset M$ nazywamy hiperbolicztm jeśli*

a) $f(\Lambda) = \Lambda$ czyli Λ jest niezmienniczy.

b) dla każdego $p \in cc$ istnieje rozkład w przestrzeni stycznej T_pM na dwie posprzestrzenie E_p^u, E_p^s

c) rozkład na podprzestrzenie jest niezmienniczy względem f tzn.

$$Df_p(E_p^u) \subset E_{f(p)}^u, \quad Df_p(E_p^s) \subset E_{f(p)}^s$$

d) $\exists c \geq 1, \quad \exists 0 < \lambda < 1, \quad \exists \mu > 1$ takie, że każdego $p \in \Lambda$

$$||Df_p(v^s)|| < c\lambda||v^s|| \quad v^s \in E_p^s$$

$$||Df_p(v^u)|| > c\mu||v^u|| \quad v^u \in E_p^u$$

Uwaga 13.2. *Czasami warunek $||Df_p(v^u)|| > c\mu||v^u||$ dla $v^u \in E_p^u$ zapisuje się w postaci $||Df_p^{-1}(v^u)|| < c\lambda^{-1}||v^u||$ dla $v^u \in E_p^u$, aby nie wprowadzać drugiej stałej μ.*

Istnienie uniwersalnych λ i μ (niezależnych od punktu) oznacza, że struktura **hiperboliczna na Λ jest jednostajna.**

Dla potoków definicja zbiorów hiperbolicznych jest podobna.

13.1 Solenoid

Najprostszymi przykładami zbiorów hiperbolicznych są hiperboliczne punkty krytyczne i orbity zamknięte (w przypadku potoków) lub hiperboliczne punkty stałe i okresowe dla dyfeomorfizmów. Podamy teraz ***przykład nietrywialnego zbioru hiperbolicznego-solenoidu***.

Solenoid skonstruowali topolodzy Hocking i Yang w 1961 r. W 1967 r. S.Smale podał układ dynamiczny dla którego zbiorem granicznym (a faktycznie hiperbolicznym atraktorem) jest solenoid.

$$D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad S^1 = \{t \in \mathbb{R} : \text{ t modulo 1}\} \asymp [0,1]$$

Niech $T^2 := D^2 \times S^1$- oznacza wypełniony torus. Rozpatrujemy $g : S^1 \to S^1$, $g(z) = z^2$, które można zapisać w postaci addytywnej jako

$$g : S^1 \to S^1 \quad g(t) = 2t \text{ modulo } 1$$

Definiujemy

$$f : T^2 \to T^2 \quad f(t,z) = \left(g(t), \frac{1}{4}z + \frac{1}{2}e^{2\pi i t}\right)$$

Czym jest obraz* $\mathbf{f(T^2)}$*?

Ponieważ g jest dwukrotnym nawinięciem S^1 na siebie, zaś druga wspólrzędna odwzorowania f jest przekształceniem zwężającym zwanym też *kontrakcją*, zatem $f(T^2)$ to dwukrotnie zwinięty i ściśniety torus.

Rozpatrzmy przekroje torusa

$$D(t) = \{t\} \times D^2.$$

Wtedy $f(D(t)) \subset D(2t)$ (modulo 1).

Np. dla $t = 0$ mamy, że $f(0,z) = \{0\} \times \{\frac{1}{4}z + \frac{1}{2}\}$, zaś dla $t = 1/2$ mamy, że $f(1/2,z) = \{0\} \times \{\frac{1}{4}z - \frac{1}{2}\}$ bo $e^{ix} = cosx + isinx$. Zatem $f(T^2) \cap D(0)$ wygląda następująco:

Z kolei dla $t = 1/4$ mamy, że $f(0,z) = \{1/2\} \times \{\frac{1}{4}z + \frac{i}{2}\} \subset D(1/2)$. Wtedy $f(T^2) \cap D(0)$ wygląda następująco:

Widzimy, że przecięcia $f(T^2) \cap D(t)$ to para dysków która 'obraca się' wraz ze wzrostem t.

Ponadto* $\mathbf{f^2(T^2)}$ *jest czterokrotnie zwiniętym torusem zawartym w* $\mathbf{f(T^2)}$*, natomiast* $\mathbf{f^3(T^2)}$ *jest ośmiokrotnie zwiniętym torusem zawatym w* $\mathbf{f(T^2)}$ *itd. .

Twierdzenie 13.3. (Smale'a) *Niech $\Lambda = \cap_{k=0}^{\infty} f^k(T^2)$. Wtedy Λ jest hiperbolicznym atraktorem topologicznego wymiaru jeden.*

Dowód tego twierdzenia podamy w kolejnych wykładach. Teraz udowodnimy szereg ciekawych własności zbioru Λ.

Lemat 13.4. *Dla każdego $t_0 \in [0,1]$, $\Lambda \cap D(t_0)$ jest zbiorem Cantora.*

Dowód Dla $t_0 \in [0,1]$ patrzymy na obrazy dwóch przekrojów

$$f(D(t_0)) = \left(t_0, \frac{1}{4}D^2 + \{\frac{1}{2}e^{\pi i t_0}\}\right)$$

i

$$f(D(\frac{t_0+1}{2})) = \left(t_0, \frac{1}{4}D^2 - \{\frac{1}{2}e^{\pi i t_0}\}\right)$$

ponieważ $e^{\pi i t_0 + \pi i} = -e^{\pi i t_0}$. Zatem obrazy przekrojów $D(t_0)$ i $D(\frac{t_0+1}{2})$ leżą w tym samym przekroju $D(t_0)$ i są symetrycznym odbiciem względem zera.

Niech $N_k := \cap_{j=0}^{k} f^j(T^2) = f^k(T^2)$.

Pokażemy, że dla każdego $t \in [0,1]$ zbiór $N_k \cap D(t)$ jest sumą 2^k dysków o promieniu $\left(\frac{1}{4}\right)^k$. Dowód jest indukcyjny. Dla $k = 0$ mamy wyjściowy torus, zaś przypadek k=1 rozpatrywaliśmy wyżej. Z definicji f wynika, że

$$N_k \cap D(t) = f(N_{k-1} \cap D(t/2) \cup f(N_{k-1} \cap D(t/2 + 1/2))$$

Z założenia indukcyjnego $N_{k-1} \cap D(t/2)$ oraz $f(N_{k-1} \cap D(t/2+1/2)$ sa sumą 2^{k-1} dysków o promieniu $\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$. Ponadto f jest przekształceniem zwężającym o wspólczynniku 1/4 w przekrojach $D(t)$ oraz dwukrotnym nawicieciem wzdluż S^1. Zatem $N_k \cap D(t)$ ma 2^k dysków o promieniu $\left(\frac{1}{4}\right)^{k}$. □

Lemat 13.5. *Zbiór Λ jest*

a) spójny

b) ma wymiar topologiczny 1

Dowód Podpunkt (a) wynika z faktu, że zbiory $I\!N_k, k \in I\!N$, są zwarte, spójne i tworzą ciąg zstępujący, zatem Λ jako ich przecięcie jest zbiorem spójnym.
(b) Dla każdego włókna $D(t)$ mamy, że $\Lambda \cap D(t)$ jest całkowicie niespójny, więc jest zerowymiarowy. Niech

$$D([t_1,t_2]) = \bigcup\{D(t) :\in [t_1,t_2]\}$$

oznacza segment wypełnionego torusa. Ponieważ $\Lambda \cap D([t_1,t_2])$ jest homeomorficzne do produktu $\Lambda \cap D(t_1)$ i odcinka $[t_1,t_2]$, ma zatem wymiar topologiczny 1. □

Lemat 13.6. *Odwzorowanie $f : \Lambda \to \Lambda$ ma następujące własności:*

a) punkty okresowe f są gęste w Λ

b) Λ jest zbiorem hiperbolicznym

Dowód (a) Fakt, że t_0 jest punktem okresowym okresu k dla g oznacza, że $g^k(t_0) = t_0 + j$ dla pewnego $j \in Z\!\!\!Z$. Zatem

$$t_0 = \frac{j}{(2^k-1)}.$$

Dla ustalonego $k \in I\!N$ punkty

$$t_{k,j} = \frac{j}{(2^k-1)} \quad j = 0,\dots,2^k-2$$

są punktami okresowymi okresu k tzn.

$$Per_k(g) := \{t_{k,j} = \frac{j}{(2^k-1)} \quad j = 0,\dots,2^k-2\}$$

Odległość między elementami zbioru $Per_k(g)$ wynosi $\frac{1}{(2^k-1)}$. Wielkość ta dąży do zera dla $k \to \infty$. Stąd punkty okresowe g są gęste w S^1 czyli

$$S^1 = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Per_n(g)}.$$

Teraz pokażemy, że punkty okresowe f są gęste w Λ. Niech $p \in \Lambda$, U-otoczenie p. Zatem istnieją $t_1, t_2 \in [0,1]$ oraz k takie, że $f^k(D([t_1,t_2]) \subset U$. Dla dużych k zachodzi, że $\frac{1}{(2^k-1)} < |t_2 - t_1|$. Niech $t_0 \in [t_1,t_2]$ takie, że $g^k(t_0) = t_0$. Wtedy $f(D(t_0)) \subset D(t_0)$. To oznacza, że $f^k(T^2) \cap D(t_0) \subset D(t_0)$ czyli f^k ma punkt stały w $D(t_0)$. Odledlość międ y $f^j(D(t_0))$ i $f^{j+1}(D(t_0))$ $(j = 0, \dots, 2^k - 2)$ dąży do zera dla $k \to \infty$. Stąd punkty okresowe są gęste w Λ.
(b) Pokażemy, że Λ ma strukturę zbioru hiperbolicznego. W lokalnych współrzędnych na $T^2 = S^1 \times D^2$ pochodną f można zapisać tak

$$Df(t,z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \pi i e^{2\pi t i} & \frac{1}{4} I_2 \end{bmatrix}$$

gdzie I_2 oznacza macierz identycznosciową na $\mathbb{C}$ lub $\mathbb{R}^2$. Niech

$$E_p^s := \{0\} \times \mathbb{R}^2.$$

Wtedy dla $(0,v) \in E_p^s$ mamy

$$Df_p\left(\begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4}v \end{bmatrix}.$$

Stąd

$$Df_p^k\left(\begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4^k}v \end{bmatrix}$$

co dąży do zera gdy $k \to \infty$. To dowodzi, że E_p^s jest podprzestrzenią w $T_p(\Lambda)$ dla której mamy zwężanie bo jak pokazalismy $Df^k(E_p^s) \subset E_{f^k(p)}^s$. Aby skonstruować przestrzeń E_p^u posłużymy się stożkami C_p^u zawartymi w $T_p(\Lambda)$. Niech

$$C_p^u := \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} : \quad v_1 \in TS^1, v_2 \in \mathbb{R}^2, \quad |v_1| \geq \frac{1}{2}|v_2| \right\}$$

(1) Pokażemy, że $Df_p(C_p^u) \subset C_p^u$. Niech $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in C_p^u$. Wtedy

$$Df_p\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2v_1 \\ \pi i e^{2\pi t i} v_1 + \frac{1}{4}v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix}$$

Wtedy

$$|v_1'| = 2|v_1| = \frac{1}{2}(4|v_1|) > \frac{1}{2}(\pi|v_1| + \frac{1}{2}|v_1|) \geq \frac{1}{2}(\pi|v_1| + \frac{1}{4}|v_1|) \geq \frac{1}{2}(|v_1'|)$$

Ta nierównosc pokazuje, że $\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} \in C^u_{f(p)}$.

(2) Przecięcie $\bigcap_{k=0}^{\infty} Df^k_{f^{-k}(p)} C^u_{f^{-k}(p)} =: E^u_p$ jest prostą w przestrzeni stycznej $T_p(\Lambda)$.

Z poprzedniego kroku wiemy, że przecięcia

$$\bigcap_{k=0}^{k} Df^j_{f^{-j}(p)} C^u_{f^{-k}(p)} = Df^k_{f^{-k}(p)} C^u_{f^{-k}(p)}$$

tworzą ciąg zstępujący.

Aby udowodnić, że przeciecie jest prostą należy pokazać, że kąt miedzy wektorami w przecieciach dąży do zera dla $k \to \infty$. Niech

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \in C^u_{f^{-k}(p)},$$

gdzie $v_1, w_1 > 0$. Niech

$$\begin{bmatrix} v_1^k \\ v_2^k \end{bmatrix} = Df^k_{f^{-k}(p)}\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) \quad \begin{bmatrix} w_1^k \\ w_2^k \end{bmatrix} = Df^k_{f^{-k}(p)}\left(\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}\right).$$

Wtedy

$$\left|\frac{v_1^1}{v_2^1} - \frac{w_1^1}{w_2^1}\right| = \left|\frac{\pi i e^{2\pi i t} v_1 + \frac{1}{4} v_2}{2v_1} - \frac{\pi i e^{2\pi i t} w_1 + \frac{1}{4} w_2}{2w_2}\right| = \frac{1}{8}\left|\frac{v_2}{v_1} - \frac{w_2}{w_1}\right|$$

To dowodzi ze mamy zwężanie kąta między wektorami. Korzystając z indukcji względem k otrzymamy, że

$$\left|\frac{v_1^k}{v_2^k} - \frac{w_1^k}{w_2^k}\right| = \frac{1}{8^k}\left|\frac{v_2}{v_1} - \frac{w_2}{w_1}\right| \to 0 \quad \text{dla} \quad k \to \infty.$$

Zatem przecięcie $\bigcap_{k=0}^{\infty} Df^k_{f^{-k}(p)} C^u_{f^{-k}(p)}$ jest prostą. W ten sposób pokazaliśmy, że istnieje rozkład przestrzeni $T_p(\Lambda)$ na dwuwymiarową E^s_p i jednowymiarową E^u_p.

(3) Pokażemy, że w normie $\left|\left|\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right|\right|_* := |v_1|$ pochodna $Df_{|E^u_p}$ jest przekształceniem rozszerzającym. Mamy

$$\left|Df_p\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right)\right|_* = \left|\left|\begin{bmatrix} 2v_1 \\ \pi i e^{2\pi i t} v_1 + \frac{1}{4}v_2 \end{bmatrix}\right|\right|_* = 2|v_1| = 2\left|\left|\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right|\right|_*$$

□

Uwaga 13.7. *Faktycznie pokazaliśmy, że wszystkie punkty okresowe w Λ są hiperbolicznymi siodłami.*

13.2 Podkowa Smale'a

Podamy drugi przykład nietrywialnego zbioru hiperbolicznego zw. podkową Smale'a.

Definicja 13.8. *Niech $f \in Diff^r(M)$, p-punkt okresowy hiperboliczny (siodło), $q \in W^s(p) \cap W^u(p)$. Wtedy punkt q nazywamy punktem homoklinicznym dyfeomorfizmu f. Jeśli $W^u(p)$ przecina transwersalnie $W^s(p)$ w punkcie q, to q nazywamy* ***transwersalnym*** *punktem homoklinicznym.*

Lemat 13.9. **(λ-lemat)** *Niech p-stały (okresowy) punkt hiperboliczny, $f \in Diff^r(M), r \geq 1$, D^u-dysk wymiaru takiego jak E^u. Zakładamy dodatkowo, że D^u jest zanurzony w M i przecina transwersalnie $W^s(p)$. Niech $D_n^u = f^n(D^u), n \in I\!N$. Wtedy $\{D_n^U\}_{n=1}^{\infty}$ zbiega do $W^u(p)$ w C^r topologii .*

Powiemy, że dysk D^u jest zanurzony w M jeśli istnieje różnowartościowe przekształcenie g klasy $C^r, r \geq 1$ takie, że $g(D(0,r)) = D^u$, gdzie $D(0,r) \subset I\!R^k, k = dimW^u(p)$.

Wniosek 13.10. *Niech $f \in Diff^r(M), r \geq 1$, $p_1, p_2, p_3 \in M$ punkty hiperboliczne. Jeśli $W^u(p_1)$ przecina transwersalnie $W^s(p_2)$, $W^u(p_2)$ przecina transwersalnie $W^s(p_3)$, to $W^u(p_1)$ przecina transwersalnie $W^s(p_3)$.*

Dowód Niech q_2 będzie punktem transwersalnego przecięcia $W^u(p_2)$ z $W^s(p_3)$. Weźmy dysk $D \subset W^u(p_2)$ zawierający p_2 i q_2. Wynika stąd, że D przecina transwersalnie $W^s(p_3)$. Dla każdego $\epsilon > 0$ jeśli $\tilde{D}$ jest dyskiem ϵ-bliskim D, to $\tilde{D}$ przecina transwersalnie $W^s(p_3)$. Niech q_1 będzie punktem transwersalnego przecięcia $W^u(p_1)$ z $W^s(p_2)$. Weźmy dysk D^u zawarty w $W^u(p_1)$ zawierający q_1. Wtedy z λ-lematu istnieje $n_0 > 0$ takie, że $f^{n_0}(D^u) \supset \tilde{D}$, które jest ϵ blisko D. Stąd istnieje $\tilde{q} \in \tilde{D} \cap W^s(p_3)$. Ponieważ $W^u(p_1)$ jest niezmiennicza, zatem $f^{n_0}(D^u) \subset W^u(p_1)$ czyli $\tilde{q}$ jest punktem transwersalnego przecięcia $W^u(p_1)$ z $W^s(p_3)$.

$\square$

Rysunek Poincarégo -'chaos' w otoczeniu punktu homoklinicznego transwersalnego

Niech q będzie punktem transwersalnego przecięcia $W^u(p)$ z $W^s(p)$. Wtedy $f^n(q) \to p$. Niech D^u dysk zawarty w $W^s(p)$ przechodzący przez $f^{n_0}(q)$. Z λ-lematu wynika, że D^u_n dąży w C^r topologii do $W^u(p)$.

Ponieważ $q \in W^s(p) \cap W^u(p)$, to $f^{-n}(q) \to p$. Niech D^s dysk zawarty w $W^s(p)$ przechodzący przez $f^{-n_0}(q)$. Z λ-lematu wynika, że $D^s_n = f^{-n}(D^s)$ dąży w C^r topologii do $W^s(p)$.

Dynamiczny chaos w otoczeniu punktu homoklinicznego transwersalnego.

Niech $D := D^s \times D^u$ oznacza produkt dysków zawartych odpowiednio w rozmaitości stabilnej i niestabilej punktu siodłowego p. Wtedy dla dużych $n \in I\!N$ obraz $f^n(D)$ jest długim i cienkim krzywoliniowym prostokątem, który przecina D i 'zawiera' podkowę.

Idea konstrukcji podkowy Smale'a.

D prostokąt, $f(D)$ ma kształt podkowy, która przecina D.

$f(D) \cap D$ ma dwie składowe. Kolejny obraz $f^2(D)$ jest podwójnie zwiniętą podkową zawartą w $f(D)$. $f^2(D) \cap D$ składa się z 4 prostokątów.

Ogólnie $f^n(D) \cap D$ jest sumą 2^n prostokątów, stąd

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(D) \cap D = I \times \mathcal{C}_1$$

gdzie $\mathcal{C}_1$ oznacza zbiór Cantora.

Teraz patrzymy na przeciwobrazy, $f^{-1}(D)$ ma kształt podkowy, która przecina D. $f^{-1}(D) \cap D$ ma dwie składowe.

$f^{-2}(D)$ jest podwójnie zwiniętą podkową zawartą w $f(D)$, $f^{-2}(D) \cap D$ składa się z 4 prostokątów.

Ogólnie $f^{-n}(D) \cap D$ jest sumą 2^n prostokątów, stąd

$$\bigcap_{n=-\infty}^{n=0} f^n(D) \cap D = \mathcal{C}_2 \times I$$

gdzie $\mathcal{C}_2$ oznacza zbiór Cantora. Niech

$$\Lambda := \bigcap_{n=-\infty}^{n=\infty} f^n(D) \cap D = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$$

Zbiór Λ nazywany jest podkową Smale'a. Podobnie jak solenoid będzie domknięciem punków okresowych. **Jego dokładny opis zostanie podany na kolejnym wykładzie.**

Twierdzenie 13.11. (Smale'a) *M- gładka rozmaitość, $f \in Diff^r(M), r \geq 1$, p-punkt stały hiperboliczny (siodło). Zakładamy, że q jest punktem homoklinicznym transwersalnym odpowiadającym punktowi p. Wtedy istnieje otoczenie U punktów $\{p, q\}$ takie, że U zawiera hiperboliczny atraktor zwany podkową Smale'a.*

Różne warianty podkowy Smale'a.

14 Strukturalna stabilność dyfeomorfizmów i pól wektorowych II

Definicja 14.1. *M- gładka rozmaitość, $f \in Diff^r(M), r \geq 1$. Powiemy, że dyfeomorfizm f spełnia **aksjomat A** jeśli:*

- *zbiór punktów niebłądzących $\Omega(f)$ jest zbiorem hiperbolicznym*

- *$\Omega(f) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Per_n(f)}$, gdzie $Per_n(f)$ oznacza zbiór punktów okresowych okresu n.*

Twierdzenie 14.2. (Smale'a o istnieniu lokalnych rozmaitości) *M- gładka zwarta rozmaitość riemanowska z metryką d, $f \in Diff^r(M), r \geq 1$. Λ zbiór hiperboliczny dla f. Wtedy istnieje $\epsilon > 0$ takie, że dla każdego $p \in \Lambda$*

- *Zbiór $W_p^s(loc) = \{x \in B(x, \epsilon) \subset M : \quad d(f^n(x), f^n(p)) \leq c\lambda^n d(x, p), \quad n \geq 0\}$ jest podrozmaitością w topologii indukowanej z M oraz*
$$T_p(W_p^s(loc)) = E_p^s$$
.

- *Zbiór $W_p^u(loc) = \{x \in B(x, \epsilon) \subset M : \quad d(f^{-n}(x), f^{-n}(p)) \leq c\lambda^n d(x, p), \quad n \geq 0\}$ jest podrozmaitością w topologii indukowanej z M oraz*
$$T_p(W_p^u(loc)) = E_p^u$$
.

gdzie $0 < \lambda < 1, c \geq 1$ stałe pochodzące z definicji zbioru hiperbolicznego.

Definicja 14.3. *M- gładka zwarta rozmaitość riemanowska z metryką d, $f \in Diff^r(M)$, $r \geq 1$. Λ zbiór hiperboliczny dla f. Globalne rozmaitości stabilne i niestabilne dla $p \in \Lambda$ definiujemy następująco:*

- *globalna rozmaitość stabilna*
$$W_p^s := \{x \in M : \quad d(f^n(x), f^n(p)) \leq c\lambda^n d(x, p), \quad n \geq 0\}$$

- *globalna rozmaitość niestabilna*
$$W_p^u := \{x \in M : \quad d(f^{-n}(x), f^{-n}(p)) \leq c\lambda^n d(x, p), \quad n \geq 0\}$$

14.1 Warunki dostateczne

Twierdzenie 14.4. (Robbin 1972) *M- gładka* **zwarta** *rozmaitość, dim M=$m < \infty$, $f \in Diff^r(M), r \geq 1$. Jeżeli dyfeomorfizm f*

- *spełnia aksjomat A*
- *rozmaitości stabilne i niestabilne dowolnych punktów $x, y \in \Omega(f)$ przecinają się transwersalnie*

to f jest ***strukturalnie stabilny*** *w $Diff^r(M)$.*

14.2 Warunki konieczne

Korzystając z teorii ergodycznej, a dokładniej z ergodycznego lematu o zamykaniu R.Mane udowodnił następujące twierdzenie.

Twierdzenie 14.5. (Mané) *M- gładka* **zwarta** *rozmaitość, dim M=$m < \infty$, $f \in Diff^r(M)$, $r \geq 1$. Jeżeli f jest strukturalnie stabilny to f spełnia aksjomat A.*

Twierdzenie 14.6. (Palis) *M- gładka* **zwarta** *rozmaitość, dim M=$m < \infty$, $f \in Diff^r(M)$, $r \geq 1$. Jeżeli f jest strukturalnie stabilny to rozmaitości stabilne i niestabilne elementów z $\Omega(f)$ przecinają się transwersalnie.*

Wniosek 14.7. *M- gładka* **zwarta** *rozmaitość, dim M=$m < \infty$, $f \in Diff^r(M), r \geq 1$. Dyfeomorfizm f jest strukturalnie stabilny wtedy i tylko wtedy gdy*

- *f spełnia aksjomat A*
- *rozmaitości stabilne i niestabilne dowolnych punktów $x, y \in \Omega(f)$ przecinają się transwersalnie.*

Tym samym jest to ***najlepsza możliwa charakteryzacja strukturalnie stabilnych dyfeomorfizmów.***

Uwaga 14.8. *Analogiczne twierdzenia zachodzą dla pól wektorowych.*

Twierdzenie 14.9. (Smale) *M- gładka* **zwarta** *rozmaitość, dim M=$m \geq 2$. Strukturalnie stabilne dyfeomorfizmy nie są gęste w $Diff^r(M), r \geq 1$.*

Na wykładzie podano błędnie m $\geq$ 3 !!!. W przypadku pól wektorowych zachodzi, że strukturalnie stabilne pola wektorowe nie są gęste na rozmaitościach wymiaru $m \geq 3$.

15 Podkowa Smale'a dla przekształcenia Hénona

Przekształceniem Hénona nazywamy odwzorowanie $F_{AB} : I\!R^2 \to I\!R^2$

$$F_{AB}(x, y) = (A - By - x^2, x)$$

gdzie A, B parametry. Wtedy

$$DF_{A,B}(x, y) = \begin{bmatrix} -2x & -B \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad detDF_{A,B} = B.$$

Jeśli $B > 0$ to F zachowuje orientację, dla $B < 0$ F zmienia orientację.

Dla wartości parametrów $A = 5$ i $B = -0.3$ iterując $F_{A,B}$ na komputerze Hénon zobaczył rysunki sugerujące, że $F_{A,B}$ ma podkowę Smale'a.

Twierdzenie 15.1. (Hénon 1976) *Niech* $B \neq 0$, $A \geq \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{5})(1 + |B|)^2$, $\mathcal{R} = \frac{1}{2}\left(1 + |B| + [(1 + |B|)^2 + 4A]^{\frac{1}{2}}\right)$, $S = \{(x, y) \in I\!R^2 : |x| \leq \mathcal{R}, |y| \leq \mathcal{R}\}$.

$$\Lambda := \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} F^j_{A,B}(S).$$

Wtedy:

1. $\Omega(F_{A,B}) \subset S$
2. Λ *jest zbiorem hiperbolicznym*
3. Λ *jest zbiorem Cantora*
4. $F_{A,B_{|\Lambda}}$ *jest toplogicznie sprzężone z dynamiką symboliczną na przestrzeni ciągów* $X = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$
5. Λ *jest podkową Smale'a*

Dowód Udowodnimy podpunkty: (2), (3) i (5). Bierzemy $A = 5$, $B = 0.3$ $\mathcal{R} = 3$, $S = \{(x, y) \in I\!R^2 : |x| \leq 3, |y| \leq 3\}$.

Patrzymy na obrazy wierzchołków dla $F := F_{A,B}$ z ustalonymi paramerami A i B.

$$b := (-3, 3), \quad F(b) = (-4.9, -3), \quad c := (3, 3), \quad F(c) = (-4.9, 3)$$

$$a := (-3, -3), \quad F(a) = (-3.1, -3), \quad d := (-3, 3), \quad F(d) = (-3.1, 3)$$

Przy odwzorowaniu F poziome odcinki z S przekształcane są na parabole, zaś pionowe odcinki na odcinki równoległe do osi Ox. $F(S)$ ma kształt podkowy, $F(S) \cap S$ = dwa ukośne prostokąty.

$F^{-1}(S)$ ma także kształt podkowy oraz $F^{-1}(S) \cap S$ to dwa pionowe prostokąty.

Zatem

$$F^{-1}(S) \cap F(S) \cap S$$

jest sumą 4 'kwadaratów'.

Patrzymy na $F^2(S)$ - jest to podwójnie zwinięta podkowa zawarta w $F(S)$.

Analogicznie mamy dla $F^{-2}(S)$.

Indukcyjnie dowodzi się, że dla każdego n dla $F^{-n}(S) \cap F^n(S) \cap S$ ma 4^n składowych.

Pokażemy, że

$$\Lambda := \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} F^j_{A,B}(S)$$

ma strukturę zbioru hiperbolicznego. Definiujemy stożki dla $p \in S$.

- niestabileny $C^u_p = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : |\eta| \leq \lambda^{-1}|\xi|\}$
- stabilny $C^s_p = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : |\eta| \geq \lambda|\xi|\}$

Definiujemy normę $|(\xi,\eta)|_* := max\{|\xi|,|\eta|\}$.

Lemat 15.2. *Istnieje $\lambda > 1$ (dla $A = 5, B = 0.3, \lambda = 1.7$) taka, że*

a) Dla $\forall p \in S \cap F(S)$, $\vec{v} \in C^u_p$ zachodzi $|DF_p(\vec{v})|_* \geq \lambda|\vec{v}|_*$ oraz $DF_p(C^u_p) \subset C^u_{F(p)}$

b) Dla $\forall p \in S \cap F^{-1}(S)$, $\vec{v} \in C^s_p$ zachodzi $|DF^{-1}_p(\vec{v})|_* \geq \lambda|\vec{v}|_*$ oraz $DF^{-1}_p(C^s_p) \subset C^s_{F^{-1}(p)}$

Podlemat

a) gdy $(x,y) \in S$ oraz $F(x,y) \in S$ to $|x| > 1$ i $2|x| - |B| \geq 1.7 =: \lambda$

b) gdy $(x,y) \in S$ oraz $F^{-1}(x,y) \in S$ to $|y| > 1$

Dowód podlematu pominiemy. Przechodzimy do dowodu lematu 15.2.

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \in C^u_p \iff |\eta| \leq \lambda^{-1}|\xi| \iff |\xi| \geq \lambda|\eta| \quad (**)$$

Zatem $|(\xi,\eta)|_* = max\{|\xi|,|\eta|\} = |\xi|$. Niech

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{bmatrix} = DF_p\left(\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2x & -B \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

Czyli

$$(*) \quad \xi_1 = -2x\xi - B\eta, \quad \eta_1 = \xi$$

Chcemy pokazać, że $(\xi_1,\eta_1) \in C^u_{F(p)}$. Ale

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{bmatrix} \in C^u_{F(p)} \iff |\eta_1| \leq \lambda^{-1}|\xi_1|$$

Z (*) $|\xi_1| = |-2x\xi - B\eta| \geq 2|x||\xi| - |B||\eta|$. Korzystając z (**) mamy $2|x||\xi| - |B||\eta| \geq 2|x||\xi| - |B||\xi| = |\xi|(2|x| - |B|) \geq \lambda|\xi|$, gdzie ostatni związek pochodzi z podlematu (punkt (a)). Ponownie wykorzystując (*) czyli $|\xi| = |\eta_1|$ dostaniemy, że

$$|\xi_1| \geq \lambda|\eta_1| \implies |\eta_1| \leq \lambda^{-1}|\xi_1|.$$

Pozostaje do udowodnienia 'rozciąganie"w stożkach C^u czyli $|DF_p(\vec{v})|_* \geq \lambda|\vec{v}|_*$ dla $\vec{v} \in C^u_p$. Ponieważ $|(\xi_1,\eta_1)|_* = |DF(\xi,\eta)|_* = |\xi_1| \geq \lambda|\eta_1| = \lambda|\xi| = \lambda||(\xi,\eta)|_*$ to kończy dowód punktu (a) z lematu 15.2.

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \in C^s_p \Longleftrightarrow |\eta| \geq \lambda|\xi| \quad (**)'$$

Zatem $|(\xi, \eta)|_* = max\{|\xi|, |\eta|\} = |\eta|$. Niech

$$\begin{bmatrix} \xi_{-1} \\ \eta_{-1} \end{bmatrix} = DF^{-1}_p\left(\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -B^{-1} & 2yB^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

Czyli

$$(*)' \quad \xi_{-1} = \eta \quad \eta_{-1} = -B^{-1}\xi + 2yB^{-1}\eta.$$

Chcemy pokazać, że $(\xi_{-1}, \eta_{-1}) \in C^s_{F^{-1}(p)}$. Ale

$$\begin{bmatrix} \xi_{-1} \\ \eta_{-1} \end{bmatrix} \in C^s_{F^{-1}(p)} \Longleftrightarrow |\eta_{-1}| \geq \lambda|\xi_{-1}|$$

Z (*)' $|\eta_{-1}| = |-B^{-1}\xi + 2yB^{-1}\eta| \geq 2|y||B^{-1}||\eta| - |B^{-1}||\xi|$. Korzystając z (**)' mamy

$$2|y||B^{-1}||\eta| - |B^{-1}||\xi| \geq |B^{-1}|(2|y| - 1)|\eta|.$$

Z podlematu (punkt (b)) wiemy $|y| > 1$, więc

$$|B^{-1}|(2|y| - 1)|\eta| \geq (2 - 1)|B^{-1}||\eta|.$$

Ponieważ $B = 0.3$ to $B^{-1} > 1.7 = \lambda$ czyli

$$|B^{-1}||\eta| \geq \lambda|\eta| = \lambda|\xi_{-1}|$$

na mocy (*)' czyli dostaniemy, że

$$|\eta_{-1}| \geq \lambda|\xi_{-1}|.$$

Pozostaje do udowodnienia 'ściąganie' w stożkach C^s czyli $|DF^{-1}_p(\vec{v})|_* \geq \lambda|\vec{v}|_*$ dla $\vec{v} \in C^s_p$. Ponieważ $|(\xi_{-1}, \eta_{-1})|_* = |\eta_{-1}| \geq \lambda|\eta| = \lambda|(\xi, \eta)|_*$. To kończy dowód punktu (b) z lematu 15.2.

Aby wykazać, że Λ ma strukturę hiperboliczną pokażemy, że dla każdego $p \in \Lambda$

$$\bigcap_{j=0}^{n} DF^j_{F^{-j}(p)} C^u(F^{-j}(p)) \neq \emptyset$$

Z lematu 15.2 wynika, że

$$\left\{\bigcap_{j=0}^{n} DF^j_{F^{-j}(p)} C^u(F^{-j}(p))\right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

jest zstępującym ciągiem stożków, więc każde przeciecie $\bigcap_{j=0}^{n} DF^{j}_{F^{-j}(p)} C^{u}(F^{-j}(p))$ jest niepuste.

Analogia zachodzi dla

$$\bigcap_{j=0}^{-n} DF^{j}_{F^{-j}(p)} C^{s}(F^{-j}(p)).$$

Aby zakończyć dowód hiperboliczności należy udowodnić, że przecięcia

$$\bigcap_{j=0}^{\infty} DF^{j}_{F^{-j}(p)} C^{u}(F^{-j}(p))$$

i

$$\bigcap_{j=0}^{-\infty} DF^{j}_{F^{-j}(p)} C^{s}(F^{-j}(p))$$

są prostymi. Niech

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \end{bmatrix} \in C^{u}_{q},$$

gdzie $\xi = \xi' = 1$ oraz $|\eta|, |\eta'| \leq \lambda^{-1}$, $q = F^{-j}(p)$ dla pewnego j. Wtedy

$$\eta_1 = \xi = 1 = \xi' = \eta_1'$$

$$\xi_1 = -2x\xi - B\eta = -2x - B\eta$$

$$\xi_1' = -2x\xi' - B\eta' = -2x - B\eta'.$$

$$\left|\frac{\eta_1}{\xi_1} - \frac{\eta_1'}{\xi_1'}\right| = \left|\frac{1}{-2x - B\eta} - \frac{1}{-2x - B\eta'}\right| = \left|\frac{B(\eta - \eta')}{(-2x - B\eta)(-2x - B\eta')}\right| \leq \frac{|B||\eta - \eta'|}{\lambda^2} \leq |\frac{|B|}{\lambda^2}\left|\frac{\eta}{\xi} - \frac{\eta'}{\xi'}\right|$$

ponieważ $| - 2x - B\eta|, | - 2x - B\eta'| \geq \lambda$ i $|\xi| = |\xi'| = 1$. To dowodzi ze mamy zwężanie kąta między wektorami w stosunku $|B|\lambda^{-2}$. Zatem przecięcie

$$\bigcap_{j=0}^{\infty} Df^j_{F^{-j}(p)} C^u_{F^{-j}(p)}$$

jest prostą, którą oznaczymy przez E^u_p. Analogicznie

$$\bigcap_{j=0}^{-\infty} Df^j_{F^{-j}(p)} C^s_{F^{-j}(p)}$$

jest prostą, którą oznaczymy przez E^s_p. W ten sposób pokazaliśmy, że istnieje rozkład przestrzeni $T_p(\Lambda)$ na E^s_p i E^u_p. Ponadto jak wynika z powyzszych obliczeń ten rozkład jest niezmienniczy. Zatem Λ jest zbiorem hiperbolicznym.

Teraz pokażemy, że Λ jest zbiorem Cantora. W tym celu wystarczy udowodnić, że składowymi zbioru Λ są punkty. Niech H_1,H_2 będą składowymi $S \cap F(S)$. Załóżmy, że $p \in H_1$. Patrzymy na składową $W^s_p \cap H_1$.

Z powyższych oszacowań dostaniemy, że średnice składowych $W^s_p \cap \bigcap_{j=0}^{n} F^j(S)$ szacują się z góry przez $C\lambda^{-n}$ i dążą do zera dla $n \to \infty$.

Niech J_1,J_2 będą składowymi $S \cap F^-(S)$. Załóżmy, że $p \in J_1$. Patrzymy na składową $W_p^u \cap J_1$.

Analogicznie dostaniemy, że średnice składowych $W_p^u \cap \bigcap_{j=-n}^{0} F^j(S)$ szacują się z góry przez $C\lambda^{-n}$ i dążą do zera dla $n \to \infty$.
Zatem składowe $\bigcap_{j-n}^{n} F^j(S)$ mają średnice dążące do zera czyli są punktami. $\square$